

## KEPELBAGAIAN PERWAKILAN SISTEM ALGEBRA KOMPUTER DALAM PEMBINAAN PENGETAHUAN BENTUK GRAF FUNGSI KUADRATIK

MOHD LAZIM ABDULLAH<sup>1</sup>, WAN SALIHIN WONG ABDULLAH<sup>2</sup>,  
ABU OSMAN MD TAP<sup>3</sup> & SULAIMAN MD YASSIN<sup>4</sup>

**Abstrak.** Sistem Algebra Komputer (SAK) merupakan teknologi yang dibangunkan untuk tujuan penyelidikan Matematik dan juga sebagai medium dalam pembelajaran berasaskan komputer. SAK dapat melakukan pengembangan, meringkaskan fungsi algebra serta bentuk graf dengan keupayaan penukaran antara perwakilan simbolik, numerik, dan grafik. Kajian ini bertujuan untuk menyelidik potensi kepelbagaian perwakilan dalam SAK bagi tujuan pembinaan pengetahuan bentuk graf fungsi kuadratik. Tiga perwakilan yang dinamakan sebagai numerik, simbolik, dan grafik dikoordinasikan oleh pelajar semasa membina pengetahuan tersebut. Penyelidikan ini menggunakan pendekatan kualitatif terhadap 8 orang pelajar sekolah menengah di sebuah sekolah berasrama penuh di negeri Terengganu. Data dikutip melalui pemerhatian, temu bual klinikal dan analisis tugas bertulis hasil suatu penerokaan terbimbing. Dapatan menunjukkan pelajar berupaya membina pengetahuan bermakna tentang bentuk graf fungsi kuadratik dengan melakukan pengkoordinasian di antara kepelbagaian perwakilan.

*Kata kunci:* Perwakilan pengetahuan, pendekatan kualitatif, pendidikan Matematik, fungsi kuadratik, bentuk grafik

**Abstract.** Computer Algebra Systems (CASs) are the technologies that had been developed for Mathematics research and also as a medium in computer-based learning. CASs can be used for expansion and simplification of algebraic functions and graph by switching (transforming) between symbolic, numerical, and graphical capabilities. The purpose of this research is to study the potential of various representations in a CAS for construction of a meaningful knowledge of graphical forms in quadratic functions. Three types of representations known as numerical, symbolic, and graphical were coordinated by students while constructing the knowledge. This research employed the qualitative approach with a sample of 8 secondary school students from a residential school in Terengganu. Data were collected through observations, clinical interviews, and analysis of students' written assignments after a guided exploration. The results show that the students were able to construct a meaningful knowledge of graphical forms of quadratic functions by coordinating various types of representations.

*Keywords:* Knowledge representations, qualitative approach, Mathematics education, quadratic functions, graphical forms

---

<sup>1,2,3&4</sup> Universiti Malaysia Trengganu, Mengabang Telipot, 21030 Kuala Terengganu, Terengganu, Malaysia

## 1.0 PENDAHULUAN

Perkembangan pesat teknologi komputer telah memungkinkan banyak aktiviti pengajaran dan pembelajaran dapat disempurnakan dengan lebih cekap. Komputer bukan sahaja bertindak sebagai alat bantu mengajar tetapi lebih berfungsi sebagai alat yang mampu 'berfikir' sebagaimana manusia berfikir. Komputer memudahkan proses kognitif seperti berfikir, menyelesaikan masalah dan aktiviti kognitif lain yang terlibat dalam proses pembelajaran. Mungkin inilah sebabnya pembelajaran berasaskan komputer dirujuk sebagai alat kognitif. Jonassen dan Reeves (1996) merujuk alat kognitif sebagai teknologi seperti bahasa bertulis, notasi Matematik, dan perisian komputer yang meningkatkan kuasa kognitif semasa berfikir, menyelesaikan masalah, dan belajar. Rowe (1988) memberi takrifan yang hampir sama yang menekankan alat kognitif sebagai satu alat teknologi yang menyokong, memandu, mengembang, dan memudahkan proses kognitif.

Salah satu alat kognitif yang sering digunakan dalam menggantikan pemerosesan maklumat manusia ialah perisian yang dikategorikan sebagai Sistem Algebra Komputer (SAK). Perisian ini direka untuk menggantikan peranan yang berkaitan dengan manipulasi ungkapan algebra dalam Matematik di peringkat menengah dan tinggi. SAK digunakan dengan meluas dalam kajian atau penyelidikan Matematik dan juga dalam pendidikan Matematik. SAK digunakan untuk melengkapkan pemikiran aras tinggi Matematik dalam pelbagai cara. Dalam kajian Matematik, SAK digunakan untuk menyediakan data yang memungkinkan kemunculan teorem baru, menyediakan contoh yang menidakkan sesuatu teorem dan menjadi alat pengiraan bagi pembuktian yang melibatkan kes algoritma finit (terbatas). SAK yang digunakan dalam penyelidikan ini juga berpotensi untuk dijadikan alat dalam pengajaran dan pembelajaran Matematik peringkat menengah dan tinggi. Dalam aspek ini, SAK digunakan sebagai alat untuk membantu proses pengolahan ungkapan algebra dalam pembelajaran Matematik.

## 2.0 PERSPEKTIF TEORITIKAL

Pembelajaran Matematik berkomputer diasaskan kepada pandangan teoritikal Duval (1993) yang menghasilkan sistem kepelbagaian perwakilan semiotik. Aktiviti yang direka adalah untuk mengenal sistem perwakilan grafik, simbolik, dan numerik.

Duval (1993) menyatakan tentang perlunya membezakan antara objek Matematik dan perwakilannya untuk memahami Matematik. Bagi mencapai tujuan ini, kepelbagaian perwakilan semiotik objek Matematik perlu digunakan. Duval (1993) mentakrifkan perwakilan ini seperti berikut:

*Perwakilan semiotik terbentuk daripada penggunaan perlambangan (signs) yang terletak dalam satu sistem perwakilan serta mempunyai makna dan fungsi tersendiri. Rajah geometri, teks, formula beralgebra, graf adalah semuanya perwakilan semiotik yang terletak dalam sistem semiotik berlainan.*

Beliau juga menambah

*Jika semiosis ialah tangkapan atau hasil daripada satu perwakilan semiotik dan neosis pula ialah kefahaman konseptual suatu objek, kita perlu nyatakan bahawa neosis tidak boleh dipisahkan daripada semiosis. Tidak ada neosis tanpa semiosis... Dalam aktiviti Matematik, adalah perlu sama ada berkebolehan menggerakkan beberapa perakaman perwakilan semiotik (rajah, graf, tulisan simbolik dan sebagainya) dalam satu operasi tunggal, atau berkebolehan untuk memilih satu perakaman perwakilan daripada perakaman perwakilan-perwakilan yang ada. Koordinasi beberapa perakaman perwakilan semiotik sesungguhnya menjadi asas kepada kefahaman konseptual sesuatu objek.*

Menurut Duval (1993), setiap perwakilan menjadi sebahagian daripada yang diwakilinya dan interaksi antara kepelbagaian perwakilan menjadi suatu yang amat perlu dalam pembentukan konsep.

### 3.0 PERNYATAAN MASALAH

Secara tradisi, pengajaran Matematik tanpa mengira peringkat kesukarannya banyak memfokuskan kepada pengajaran yang menggunakan perwakilan algebra. Misalnya, penyelesaian ungkapan algebra  $2x^2 + 7x - 3 = 2x$  sering kali diperolehi dengan kaedah memudahkan ungkapan algebra tersebut dan seterusnya mencari nilai  $x$ . Penyelesaian kaedah beralgebra ini tidak dapat memberi konsepsi yang jelas di kalangan pelajar. Perwakilan simbolik ini ditonjolkan dengan harapan ianya dapat mengelakkan kecelaruan di antara objek Matematik dan perwakilan yang lain. Guru selalunya tidak cuba untuk mengambil kira perwakilan geometri dan intuitif. Guru mungkin beranggapan sistem perwakilan algebra adalah sesuatu yang formal dan mesti ditekankan dalam pengajaran Matematik. Ini meletakkan peranan perwakilan lain sudah tidak begitu penting. Penggunaan perwakilan yang menumpukan kepada algebra mungkin menyebabkan ada sebahagian pelajar yang mengalami kesukaran membina konsep. Misalnya dalam pengajaran kalkulus, Aspinwall *et al.* (1997) menyebut bahawa penekanan manipulasi simbol (ungkapan algebra) yang terlalu sehingga menyebabkan hilangnya nilai (*spirit*) kalkulus.

Walaupun demikian, kajian empirikal mendapati kecekapan pembinaan objek Matematik adalah berasaskan tahap penggunaan beberapa perwakilan semiotik. Penggunaan kepelbagaian perwakilan Matematik memberi ruang kepada pembinaan konsep imej (Tall dan Vinner, 1981). Salah satu alat kognitif yang kaya dengan ciri-ciri kepelbagaian perwakilan serta digunakan dengan meluas ialah SAK. Sistem ini menawarkan pengoperasian kepelbagaian sistem algebra dengan cepat dan berkesan. Perisian ini juga disebut sebagai manipulator simbolik kerana kecekapannya mengendalikan simbol beralgebra. Ciri-ciri kepelbagaian perwakilan dalam SAK serta kemampuan pengguna melakukan aktiviti visualisasi dikatakan dapat

melengkapkan keberkesanan penggunaan perisian komputer dalam membina pengetahuan konseptual. Menurut Bowers (1995), SAK yang menggalakkan pelajar untuk memanipulasi simbol dalam sistem *microworld* mampu menyediakan alat yang berkesan dalam pembelajaran konseptual. Perisian jenis ini direka bagi membolehkan pelajar meneroka satu domain dan mewujudkan interaksi sosial dengan menggunakan sistem simbol untuk menyelesaikan masalah ungkapan algebra.

Berasaskan kepentingan kepelbagaian perwakilan dalam SAK dan kemampuannya membawa kepada pembinaan konsep yang kukuh, maka satu persekitaran pembelajaran menggunakan perisian SAK untuk menggalakkan pelajar berfikir secara visual dan numerik dan tidak hanya menggunakan simbol, cuba disiasat. Bahan pengajaran pembinaan pengetahuan konseptual dalam komponen algebra Matematik Tambahan tingkatan empat dibangunkan oleh penyelidik dengan menggunakan arahan tertentu dalam sejenis perisian SAK iaitu *Mathematica*. Perisian komputer ini dikatakan terbukti baik dalam perwakilan Matematik dari sudut numerik, simbolik, dan grafik. Peranan perwakilan Matematik ini cuba dikaitkan dengan proses membina satu konsep dalam tajuk fungsi kuadratik.

#### 4.0 TUJUAN

Tujuan kajian ialah untuk menyelidik potensi kepelbagaian perwakilan numerik, simbolik, dan grafik dalam persekitaran SAK, iaitu *Mathematica* semasa pembinaan pengetahuan bentuk graf bagi fungsi kuadratik. Bagi mencapai tujuan ini, dua persoalan kajian dikemukakan seperti berikut:

- (i) Adakah perwakilan numerik,  $a$  dapat dikeluarkan daripada perwakilan simbolik,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , bentuk am?
- (ii) Adakah perwakilan numerik,  $a$  dapat dikaitkan dengan perwakilan grafik, bentuk graf?

#### 5.0 METODOLOGI

Proses pembelajaran dijalankan kepada 8 orang pelajar tingkatan empat di sebuah sekolah berasrama penuh di Pantai Timur, Semenanjung Malaysia. Subjek tidak pernah didedahkan dengan perisian SAK dan mereka juga belum mempelajari subtopik yang menjadi bahan aktiviti kajian. Satu modul pembelajaran telah disediakan oleh penyelidik dengan menggunakan arahan SAK, *Mathematica*. Lantaran itu pelajar tidak perlu mencipta arahan tetapi sebaliknya mengikut turutan pembelajaran yang disediakan dalam modul. Pembelajaran berlangsung selama 45 minit di dalam makmal multimedia dengan satu komputer bagi setiap subjek kajian. Sepanjang pembelajaran berlangsung, penyelidik bertindak sebagai guru yang membantu sebarang masalah dari segi teknikal SAK dan juga kandungan mata pelajaran.

### 5.1 Aktiviti Pembinaan Pengetahuan Bentuk Graf

Pada asasnya, fungsi kuadratik mempunyai dua bentuk graf iaitu maksimum atau minimum. Bentuk graf boleh dikenali dengan mengecam nilai pemalar pekali  $x^2$ ,  $a$  yang diperolehi dari bentuk am fungsi kuadratik. Dengan kata lain, bentuk graf bergantung kepada nilai  $a$ . Arahan **Expand** yang ditambah dengan arahan **Plot** bertujuan melihat bentuk graf dan kaitannya dengan nilai  $a$ .

Setiap langkah aktiviti penerokaan pelajar dirakamkan dengan menggunakan perisian *Camtasia 3.0* yang disepadukan bersama-sama dengan modul penerokaan tanpa disedari oleh pelajar. Di samping itu, aktiviti penerokaan ini disimpan dalam disket sebagai dokumen hasil penerokaan. Dengan itu satu maklumat terperinci proses pembinaan pengetahuan yang dilalui oleh pelajar akan dapat diperhati melalui rakaman dan tugas bertulis hasil penerokaan.

Setelah aktiviti penerokaan tamat, langkah berikutnya ialah menjalankan temu bual klinikal. Temu bual klinikal merupakan salah satu teknik pengumpulan data yang digunakan dengan meluas untuk mengkaji dan mengenal pasti konsepsi pelajar tentang konsep tertentu dalam Matematik (Hunting, 1997). Menurut Steffe dan Cobb (1984), teknik temu bual klinikal dianggap paling sesuai bagi tujuan menyelidik langkah-langkah yang digunakan pelajar semasa membina konsep Matematik. Temu bual yang dimajukan oleh Piaget ini terdiri daripada dua bentuk, iaitu temu bual klinikal berbahasa dan temu bual klinikal disemak. Temu bual berbahasa dikemukakan kepada pelajar secara lisan sepenuhnya tanpa melibatkan bahan-bahan konkrit. Dalam pembelajaran Matematik, Piaget menyedari temu bual berbahasa ini tidak mencukupi. Piaget memperbaiki kaedah ini dengan menggunakan bahan-bahan konkrit untuk memberi contoh, mewakili atau menggambarkan masalah yang perlu diselesaikan. Dalam kajian ini, rakaman *Camtasia 3.0* aktiviti penerokaan dan tugas bertulis hasil penerokaan akan menjadi bahan konkrit sepanjang temu bual berlangsung. Melalui temu bual klinikal, penyelidik dapat menentukan dengan lebih mendalam pengkoordinasian kepelbagaian perwakilan untuk menggerakkan proses kognitif semasa membina pengetahuan.

### 6.0 DAPATAN KAJIAN

Dalam aktiviti membina pengetahuan bentuk graf, subjek dikehendaki mengenal perwakilan numerik pemalar fungsi kuadratik dari perwakilan simbolik bentuk am dengan menekankan kepada perwakilan numerik nilai pemalar  $a$ . Pemalar  $a$  iaitu pekali  $x^2$  inilah yang menjadi petunjuk kepada perwakilan grafik bentuk graf. Pengetahuan bentuk graf dikatakan lengkap setelah subjek dapat mengaitkan perwakilan simbolik pertama (bentuk tak ringkas fungsi kuadratik) kepada perwakilan simbolik kedua (bentuk am fungsi kuadratik), mengeluarkan perwakilan numerik (nilai pemalar  $a$ , pekali  $x^2$ ), dan diakhiri dengan peneguhan visual perwakilan grafik

(paparan graf fungsi kuadratik). Secara amnya, aktiviti ini menggunakan dua perwakilan simbolik, satu perwakilan numerik, dan satu perwakilan grafik.

Bagi menjawab persoalan kajian, dapatan kajian kualitatif ini dibentangkan mengikut pola pembinaan pengetahuan pelajar. Petikan temu bual klinikal di antara subjek (S) dan penyelidik (P) dibentangkan bagi menjelaskan kefahaman subjek tentang aktiviti yang dijalankan.

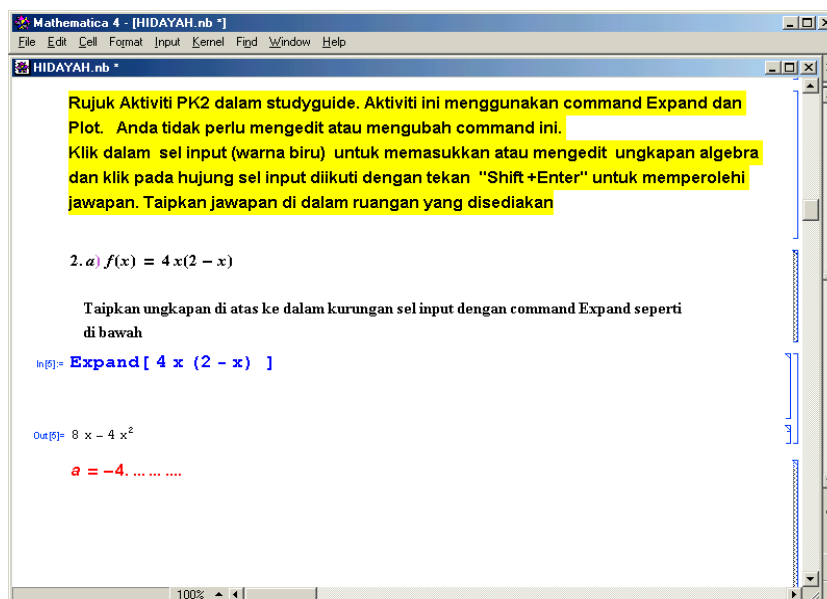
Perpindahan antara dua perwakilan simbolik dapat dilakukan dengan sempurna oleh semua subjek. Subjek berjaya menukarkan perwakilan simbolik bentuk tak ringkas fungsi kuadratik kepada perwakilan simbolik bentuk am. Nilai perwakilan numerik  $a$  yang diperolehi daripada perwakilan simbolik bentuk am juga dapat dilaksanakan dengan baik oleh semua subjek.

Petikan-petikan berikut menjelaskan kebolehan subjek menukar bentuk tak ringkas,  $f(x) = 4x(2 - x)$  kepada bentuk am,  $f(x) = 8x - 4x^2$  dan kefahaman subjek dalam mengenal perwakilan numerik  $a$ . Subjek S2 berjaya menjelaskan langkah yang sepatutnya dilakukan untuk menukarkan bentuk tak ringkas kepada bentuk am. Subjek S2 juga dapat mengenal numerik  $a$  dengan penjelasan yang begitu baik. Penjelasan subjek S2 dapat dilihat dalam petikan 1/S2/PK02.

#### Petikan 1/S2/PK02

- P: Adakah ungkapan ini dalam bentuk am?  
*[P tunjukkan satu ungkapan tak ringkas fungsi kuadratik pada skrin.]*
- S: Tidak ... kita kena kembangkan ... untuk dapat bentuk mudah ... tapi ... berada dalam bentuk am tetapi tidak teratur ...
- P: Cuba perhatikan nilai pemalar  $a$  fungsi kuadratik ini...apakah nilai  $a$ ?
- S: -4
- P: Adakah ianya positif atau negatif?
- S: Negatif.
- P: -4 ini pekali apa?
- S: Pekali  $a$ .
- P: Pekali apa?  
*[P cuba dapatkan kepastian.]*
- S: Pekali bagi  $x^2$ .
- P: Bagaimana dapat nilai  $a$  ini?
- S: Cari  $x^2$ , lepas tu jumpa nombor, lepas tu taulah itu  $a$ ....  
*[S memberi penerangan yang betul.]*

Paparan sebahagian daripada aktiviti subjek S2 dapat diperhatikan seperti dalam Rajah 1.



Rajah 1 Paparan sebahagian daripada aktiviti subjek S2

Dapat diperhatikan pada paparan ini bahawa subjek S2 secara khusus dan pasti dapat menunjukkan (*pinpoint*) nilai perwakilan numerik  $a = 4$  yang sebenarnya adalah juga pekali kepada  $x^2$ .

Seperti subjek S2, subjek-subjek lain juga dapat menukarkan bentuk tak ringkas kepada bentuk am fungsi kuadratik. Penukaran ini begitu mudah disempurnakan kerana arahan **Expand** telah tersedia dan pelajar hanya perlu memasukkan ungkapan algebra ke dalam arahan **Expand** dan seterusnya tekan kekunci **Enter + Shift**. Walaupun begitu, pengalaman penerokaan untuk mengenal pekali  $x^2$  menunjukkan gaya penerangan yang berbeza tetapi masih mampu memberi jawapan yang tepat. Pengalaman subjek S2 untuk mengenal pekali  $a$  juga turut dikongsi oleh subjek S7 tetapi beliau seolah-olah menyamakan  $-4x^2$  itu dengan  $a$ . Penerangan subjek S7 yang menyatakan perlunya penyusunan semula perwakilan simbolik bentuk am menyerlahkan kefahaman beliau. Perlakuan ini dapat dilihat dalam petikan 2/S7/PK02.

#### Petikan 2/S7/PK02

- P: Bagaimana dapat nilai  $a = -4$ ?
- S: Mula-mula saya selesaikan ....fungsi kuadratik tu...dia dapatlah  $-14 + 10x - 4x^2$ ....jadi macam yang saya belajar sebelum ini...ehhh..  $ax^2 + bx + c$ .... tapi kalau nak ikut tak susun, jadi saya susun semula  $-4x^2 + 10x - 14$ , jadi  $-4x^2$  merupakan nilai bagi  $a$ .  
*[Respon yang jelas dan betul oleh S.]*

Keputusan bentuk am fungsi kuadratik dalam usaha mengenal pekali  $a$  turut dinyatakan oleh subjek S3 dan S1 dalam ayat yang ringkas. Perkataan 'susun' seperti dalam petikan 3/S3/PK02 menjelaskan keputusan bentuk am dalam mengenal pasti numerik  $a$ .

Petikan 3/S3/PK02

- P: Cuba perhatikan nilai pemalar  $a$  fungsi kuadratik ini.....Apakah nilai  $a$ ? [*P merujuk kepada ungkapan pada skrin.*]  
 S: Negatif 4.  
 P: Bagaimana dapat nilai ini?  
 S: Kita susun dalam bentuk am,..... cari nilai  $a$  lah.

Subjek S1 pula memperlihatkan kefahaman yang agak tersasar tetapi penjelasan berikutnya masih menekankan bentuk am. Penerangan ringkas S1 dapat dilihat dalam petikan 4/S1/PK02.

Petikan 4/S1/PK02

- P: Bagaimana anda dapat nilai  $a = -4$ ?  
 S: Dengan program ni .... So.....eee.....  
 [*Penjelasan S yang tidak menepati kehendak soalan.*]  
 P: Dari manakah nilai  $a = -4$  didapati?  
 S: Dari fungsi tu.....bentuk am dia.

Subjek S6 pula memberi penjelasan ringkas tanpa menyebut bentuk am tetapi sudah cukup menggambarkan kefahaman beliau. Beliau menggunakan perkataan 'pandukan' dan 'dekat  $x^2$ ' dalam mengenal nilai numerik  $a$ . Petikan 5/S6/PK02 menjelaskan perlakuan subjek S6.

Petikan 5/S6/PK02

- P: Bagaimana dapat nilai  $a = -4$ ?  
 S: Kembangkan, kita dapat .....kita pandukan  $ax^2$  tu.... $a$  tu.. kita ambil dekat  $x^2$ .

Nilai pemalar numerik  $a$  begitu penting untuk memberi gambaran bentuk graf fungsi kuadratik. Walaupun pada peringkat awalnya ada sebahagian subjek yang menampakkan kekeliruan bagaimana nilai numerik diperolehi namun didapati semua subjek masih mampu mengaitkan satu perwakilan simbolik kepada perwakilan numerik nilai  $a$ .

Penerokaan pembinaan pengetahuan konseptual bentuk graf dilanjutkan dengan melihat kebolehan subjek mengaitkan perwakilan numerik nilai  $a$  dengan perwakilan



grafik bentuk graf yang terhasil. Secara amnya, semua subjek dapat menjelaskan perkaitan di antara perwakilan numerik nilai  $a$  dengan bentuk graf fungsi kuadratik sama ada maksimum atau minimum. Antara perlakuan subjek untuk menjelaskan proses perkaitan dua perwakilan ini dapat dilihat dalam petikan 6/S6/PK02. Dalam petikan ini, perwakilan grafik telah memberi satu kepastian kepada subjek tentang bentuk graf yang diplot. Rumusan perkaitan antara dua perwakilan dapat dijelaskan dengan baik.

Petikan 6/S6/PK02

- P: Kenapa kita perlu melukis graf?  
S: Untuk mengetahui bentuk graf sama ada parabola maksimum atau minimum.  
*[Jawapan yang tepat.]*  
P: Cuba rumuskan kaitan nilai  $a$  dengan bentuk parabola graf?  
S: Jika pekali  $a$  bernilai positif graf terhasil parabola minimum dan jika pekali  $a$  negatif bentuk graf akan parabola maksimum.  
*[Penjelasan yang baik.]*

Penjelasan yang jelas juga dapat diperhatikan dalam petikan 7/S4/PK02. Subjek S4 dapat mengesahkan perkaitan yang wujud antara perwakilan numerik  $a$  dengan perwakilan grafik.

Petikan 7/S4/PK02

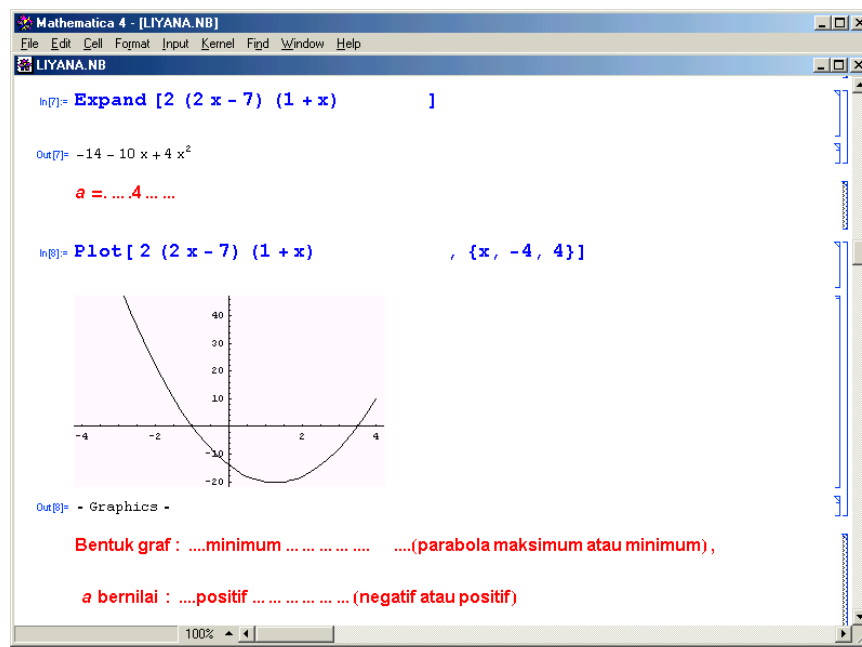
- P: Bagaimana dikaitkan antara nilai  $a$  dengan bentuk graf?  
S: Mula-mula kita tengok kuasa tertinggi  $x$ , kuasa dua dia berapa, maknanya  $a$  sama dengan negatif 4, negatif 4 kita tahu kalau  $a$  negatif, parabola dia maksimum, kalau positif, parabola dia minimum.  
P: Bagaimana anda mengesahkan pernyataan ini?  
S: Kita tengok bentuk graf dialah. Parabola maksimum bila nombor  $a$  tu negatif dan parabola minimum bila nombor  $a$  tu positif.

Dalam petikan 8/S2/PK02 ini pula, keperluan perwakilan grafik sekali lagi ditekankan oleh subjek untuk mengesahkan perkaitan antara nilai numerik dengan bentuk graf. Pada peringkat awal, subjek S2 tidak mampu memberi penjelasan tentang perkaitan yang wujud. Ini memaksa penyelidik mengajak subjek membuat refleksi aktiviti sebelum ini dan akhirnya subjek S2 dapat menjelaskan perkaitan kepelbagaian perwakilan dengan baik.

## Petikan 8/S2/PK02

- P: Bagaimana anda kaitkan nilai  $a$  dengan bentuk graf?  
 S: Mula-mula, kalau nak tahu  $a$  tu berapa, kita tengok.....  
*[S tidak menjawab soalan.]*  
 P: Dari mana dapat  $a$  tu?  
*[P cuba meletakkan S berfikir dari awal aktiviti ini.]*  
 S:  $a$  tu kena tengok ungkapan dia tu, hak ada  $x$  kuasa dua, lepas tu kita tahu tu..., kita pun tengok  $a$ , macam kalau  $a$  positif, parabola dia minimum tapi kalau  $a$  dia tu negatif, kita akan dapat parabola negatif...ee...parabola maksimum.  
 P: Bagaimana kita nak tentukan graf tu betul?  
 S: Kita plot graf lah..  
 P: Bagaimana kaitkan  $a$  dengan graf....cuba buat kesimpulan?  
 S: Kalau  $a$  tu.. positif, kita akan dapat parabola minimum, kalau  $a$  tu.. negatif kita akan dapat parabola maksimum.

Aktiviti penerokaan ini telah memberi satu kefahaman yang jelas tentang perkaitan perwakilan numerik dan grafik. Salah satu paparan aktiviti yang mampu membina perkaitan antara perwakilan numerik dan perwakilan grafik dapat dilihat dalam Rajah 2.



Rajah 2 Paparan sebahagian daripada aktiviti subjek S6

Secara keseluruhannya, dalam aktiviti pembinaan pengetahuan bentuk graf fungsi kuadratik ini, subjek berjaya menukar satu perwakilan simbolik tak ringkas kepada perwakilan simbolik yang ringkas. Langkah berikutnya dilanjutkan dengan kemampuan subjek mencari perwakilan numerik sebelum diteruskan kepada kemuncak pembinaan pengetahuan bentuk graf, iaitu pengesahan oleh perwakilan grafik. Pengetahuan bentuk graf yang dibina dengan berkesan oleh subjek adalah hasil daripada pengkoordinasian bijak perwakilan simbolik, numerik dan grafik dalam SAK, *Mathematica*.

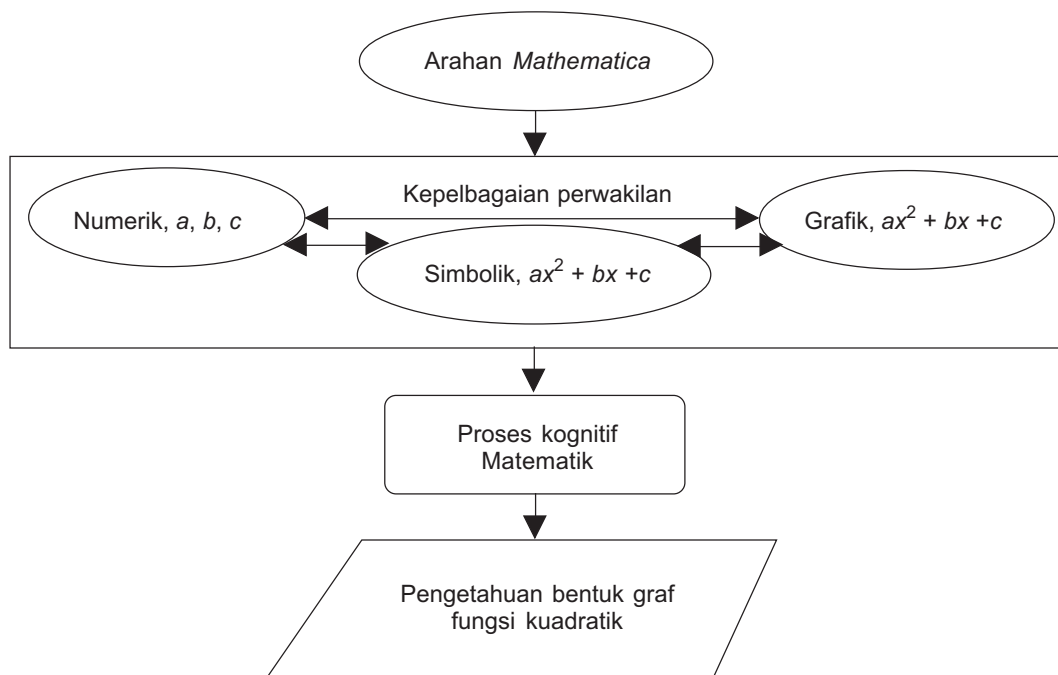
## 7.0 PERBINCANGAN DAN RUMUSAN

Dalam kajian ini, pelajar dapat membina pengetahuan bentuk am fungsi kuadratik dengan melakukan penukaran bentuk dalam sistem kepelbagaian perwakilan. Dengan menggunakan keupayaan simbolik dalam SAK, arahan **Expand** telah menukarkan dua bentuk perwakilan simbolik dan seterusnya pelajar mampu mengeluarkan perwakilan numerik pekali bentuk am. Dalam SAK, pemerolehan pengetahuan ini tidak lagi dipusatkan kepada prosedur simbolik tetapi dibina melalui pengkoordinasian perwakilan simbolik dan numerik. Dalam persekitaran begini, pelajar menggunakan kepelbagaian perwakilan untuk menyatakan idea dan konsep atau alat untuk mengkonsepkan pengetahuan. Perpindahan daripada satu perwakilan simbolik fungsi kuadratik tak ringkas kepada satu lagi perwakilan simbolik fungsi kuadratik ringkas diperkukuhkan lagi dalam pembinaan pengetahuan bentuk graf. Penekanan aktiviti ini lebih kepada nilai pekali perwakilan numerik  $a$  sahaja. Arahan **Plot** digunakan dengan sebaiknya untuk melihat perwakilan grafik. Kepentingan nilai  $a$  dalam menentukan bentuk graf dapat dihayati dengan baik oleh subjek. Penjelasan yang meyakinkan tentang perkaitan antara dua jenis perwakilan ini dapat diluahkan dengan baik oleh subjek. Pengolahan dan penghayatan penukaran dari satu perwakilan kepada perwakilan yang lain dapat melengkapkan pembinaan pengetahuan bentuk graf bagi fungsi kuadratik.

Dapatan kajian ini bertepatan dengan pandangan yang diutarakan oleh Goldenberg (1995). Beliau berpendapat, dengan menggunakan kebolehan numerik, simbolik dan grafik, SAK menyediakan persekitaran yang ideal untuk membangunkan satu kefahaman kepelbagaian perwakilan idea Matematik. Peranan kepelbagaian perwakilan ini turut dikongsi oleh Edwards (1996) yang menggunakan SAK, kalkulator grafik dalam mencari bentuk graf fungsi kuadratik. Beliau menetapkan numerik  $a = 1$  dan  $b = 2$  seterusnya pelajar meletakkan variasi numerik  $c$ . Menurut beliau, pelajar boleh melihat kepada perkaitan antara fungsi (simbolik) yang dapat digambarkan oleh perwakilan grafik untuk meneguhkan kefahaman bentuk graf. Dapatan ini juga bertepatan dengan perkembangan sains kognitif seperti yang dilaporkan oleh Pape dan Tchoshanov (2001).

SAK, *Mathematica* memberi peluang kepada pelajar melakukan penerokaan dengan memasukkan parameter input yang dikawal oleh arahan *Mathematica*.

Persekitaran SAK, *Mathematica* membekalkan kepelbagaian perwakilan simbolik, numerik, dan grafik. Perwakilan yang dilihat pada skrin diubah bentuk kepada perwakilan yang lain dengan penggunaan arahan *Mathematica*. Setiap perwakilan mempunyai ciri yang dapat membantu memahami ciri-ciri atau corak perwakilan yang berikutnya. Peranan kepelbagaian perwakilan SAK, *Mathematica* dalam membina pengetahuan bentuk graf fungsi kuadratik dapat dirumuskan seperti dalam Rajah 3.



**Rajah 3** Kepelbagaian perwakilan dalam pembinaan pengetahuan bentuk graf fungsi kuadratik

Secara keseluruhannya, sistem kepelbagaian perwakilan seperti yang digambarkan dalam Rajah 3 memberi makna yang besar kepada peranan perwakilan elektronik dalam pembinaan pengetahuan. Kepentingan dan peranan kepelbagaian perwakilan elektronik ini bertepatan dengan perkembangan terkini sains kognitif dalam Matematik. Pada masa ini telah diterima umum bahawa penggunaan sistem perwakilan menyumbang ke arah peningkatan kebolehan pemikiran Matematik, perkembangan penyelesaian masalah, dan kemahiran membuat penakulan di kalangan pelajar (Yakimanskaya, 1991; Presmeg, 1999). Ringkasnya, dapatan kajian ini menunjukkan kepelbagaian perwakilan dalam persekitaran pembelajaran telah bertindak sebagai satu proses yang mampu membantu pelajar membina pengetahuan bentuk graf bagi fungsi kuadratik.

Sistem kepelbagaian perwakilan dalam modul dapat mencadangkan beberapa rumusan tentang hubungan antara kepelbagaian perwakilan dengan pembinaan pengetahuan. Antaranya, penggabungan dan pengintegrasian kepelbagaian perwakilan menghasilkan satu entiti perwakilan tunggal. Perwakilan berbeza dirangkaikan untuk bertindak secara serentak dalam pembinaan pengetahuan. Subjek boleh mengesahkan bahawa setiap pengetahuan sebagai satu unit tunggal yang menggabungkan kepelbagaian perwakilan. Misalnya pengetahuan bentuk graf fungsi kuadratik menggabungkan empat perwakilan yang bertindak serentak. Penggabungan perwakilan ini dilaporkan oleh Larkin dan Simon (1987) yang mengesahkan bahawa penggabungan perwakilan simbolik dan grafik dalam situasi Matematik adalah perlu bagi pembinaan objek Matematik yang lebih kaya.

Kepelbagaian perwakilan juga membenarkan subjek menukar dari satu perwakilan kepada perwakilan lain atau berbalik semula kepada perwakilan pertama seolah-olah membentuk satu pertalian di antara perwakilan bagi tujuan membina pengetahuan yang kukuh. Sebagai contoh, bentuk graf maksimum fungsi kuadratik dikaitkan dengan nilai pekali  $a$ . Pelajar boleh bermula dengan perwakilan grafik dan berbalik semula kepada perwakilan numerik dalam mengenal pasti bentuk graf maksimum tersebut. Pada peringkat inilah berlakunya kesan hubungan (*interplay*) dan pertalian antara dua perwakilan yang membantu pelajar membina konsep. Kepentingan pertalian antara kepelbagaian perwakilan ini turut diterangkan oleh Thompson (1994) yang menjelaskan bahawa konsep fungsi bukanlah diwakili oleh sebarang kepelbagaian perwakilan dalam fungsi, tetapi lebih kepada cara melakukan pertalian antara aktiviti perwakilan.

Sistem dalam entiti perwakilan tunggal bersepadu mempunyai pertalian erat yang saling memerlukan di antara satu sama lain (*mutually dependence*). Pelajar tidak dapat membina pengetahuan yang lengkap jika satu daripada perwakilan itu tidak ada atau tidak difahami. Satu perwakilan tertentu akan memerlukan pelajar memikirkan satu perwakilan lain yang bergantung kepada perwakilan sebelumnya. Misalnya, pelajar gagal membina pengetahuan bentuk graf yang sempurna jika numerik  $a$  tidak diperolehi atau tidak dapat dihayati kerana saling kebergantungan perwakilan numerik ini dengan perwakilan grafik. Kepentingan pertalian erat kepelbagaian perwakilan turut disarankan oleh Santos (2000) yang menyatakan bahawa pelajar mempunyai kejayaan yang lebih besar dalam membina pertalian antara kepelbagaian perwakilan apabila mereka digalakkan untuk membuat refleksi tentang bagaimana pengetahuan daripada satu perwakilan boleh membantu membina perwakilan yang lain.

Persekitaran pembelajaran SAK dengan keupayaan kepelbagaian perwakilan membenarkan pelajar memanipulasi perwakilan numerik, simbolik, dan grafik dalam pembelajaran bentuk am fungsi kuadratik. Subjek boleh memerhati kesan atau hasil setiap manipulasi perwakilan ini secara berasingan atau boleh juga memerhati hasil gabungan kepelbagaian perwakilan. Kombinasi penggunaan perwakilan numerik,

simbolik dan grafik sebagai satu entiti, sesungguhnya dapat mengukuhkan persepsi bentuk graf bagi fungsi kuadratik dan seterusnya menjurus ke arah kefahaman yang lebih baik tentang bentuk graf fungsi kuadratik.

## RUJUKAN

- Aspinwall L., K. Shaw, dan N. Presmeg. 1997. Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections between a Function and its Derivative. *Educational Studies in Mathematics*. 33: 301-317.
- Bowers, J. 1995. Coordinating Top-down and Bottom-up Approach: An Alternative Perspective for Developing A Mathematical Microworld. Disunting oleh J. L. Schnase dan E. L. Cunnius. Proceedings of the First International Conference on Computer Support for Collaborative Learning. Indiana University. Bloomington, IN. 121-125.
- Duval, R. 1993. Registres de Representation Semiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensee. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5: 37-65.
- Edwards, T. G. 1996. Exploring Quadratic Functions: From *a* to *c*. *The Mathematics Teacher*. 89(2): 144-146.
- Goldenberg, P. 1995. Multiple Representations: A Vehicle for Understanding. Dalam *Software Goes to School: Teaching for Understanding with New Technologies*. Disunting oleh D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, dan M. Stone. Oxford: Oxford University Press. 155-171.
- Hunting, R. P., dan B. A. Doig. 1997. Clinical Assessment in Mathematics: Learning the Craft. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 19(3): 29-48.
- Jonassen, D. H., dan T. C. Reeves. 1996. Learning with Technology: Using Computers as Cognitive Tools. Dalam *Handbook of Research on Educational Communication and Technology*. Disunting oleh D. H. Jonassen. New York: MacMillan. 693-719.
- Larkin, J. H., dan H. A. Simon. 1987. Why a Diagram is (Sometimes) Worth Ten Thousand Words. *Cognitive Science*. 11: 65-99.
- Pape, S. J., dan M. A. Tchoshanov. 2001. The Role of Representations in Developing Mathematical Understanding. *Theory into Practice*. 40(2): 118-125.
- Presmeg, N. C. 1999. On Visualization and Generalization in Mathematics. Disunting oleh F. Hitt and M. Santos. Proceedings of the twenty first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education Columbus. OH. 151-155.
- Rowe, H. A. H. 1988. Metacognitive Skills: Promises and Problems. *Australian Journal of Reading*. 11: 227-238.
- Santos, M. 2000. The Use of Representations as a Vehicle to Promote Students' Mathematical Thinking in Problem Solving. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*. 7(3): 193-212.
- Steffe, L. P., dan P. Cobb. 1984. Children's Construction of Multiplicative and Divisional Concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 6: 11-29.
- Tall, D., dan S. Vinner. 1981. Concept Images and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*. 12: 151-169.
- Thompson, P. W. 1994. Students, Functions and the Undergraduate Curriculum. Dalam *Issues in Mathematics Education: Vol.4, Research in Collegiate Mathematics Education*. Disunting oleh E. Dubinsky, A. Schoenfeld, dan J. Kaput. Washington DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America. 21-44.
- Yakimanskaya, I. 1991. *The Development of Spatial Thinking in Schoolchildren: Soviet Studies in Mathematics Education*. Reston VA: National Councils of Teachers of Mathematics.