Jurnal Teknologi, 37(C) Dis. 2002: 1–10

TRANSFORMASI TERHADAP MIN BAGI MENGUJI TABURAN TERPENCONG

NOR HANIZA SARMIN[1], MD HANAFIAH MD ZIN[2] & RASIDAH HUSSIN[3]

Abstrak. Suatu transformasi terhadap min dilakukan menggunakan penganggar pembetulan kepincangan bagi mendapatkan statistik untuk menguji min hipotesis taburan terpencong. Penghasilan statistik ini melibatkan pengubahsuaian pemboleh ubah $t = \sqrt{n-1}(\bar{X} - \mu)/S$. Kajian simulasi yang dijalankan terhadap taburan yang terpencong iaitu taburan eksponen, kuasa dua khi dan Weibull ke atas Kebarangkalian Ralat Jenis I menunjukkan bahawa statistik t_3 sesuai untuk ujian satu hujung sebelah kiri dan saiz sampel yang kecil ($n = 5$).

Kata Kunci: Min, statistik, taburan terpencong, penganggar pembetulan kepincangan, kebarangkalian Ralat Jenis I

Abstract. A transformation of mean has been done using a bias correction estimator to produce a statistic for mean hypothesis of skewed distributions. The statistic found involves a modification of the variable $t = \sqrt{n-1}(\bar{X} - \mu)/S$. A simulation study that has been done on some skewed distributions *i.e.* exponential, chi-square and Weibull on the Type I Error shows that t_3 is suitable for the left-tailed test and a small sample size ($n = 5$).

Key Words: Mean, statistic, skewed distribution, bias correction estimator, Type I Error

1.0 PENGENALAN

Pemboleh ubah awal yang digunakan bagi menguji min taburan terpencong ialah pemboleh ubah *t*. Pemboleh ubah *t* ini adalah daripada taburan *t* yang diperoleh oleh Sutton [1] dan diberi oleh $t = \sqrt{n-1}(\bar{X} - \mu)/S$ dengan $\bar{x}$ dan *s* ialah min dan sisihan piawai sampel, masing-masing bagi sampel rawak bersaiz *n* daripada populasi yang mempunyai taburan normal, dengan min μ dan varians σ^2, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Walau bagaimanapun, kajian-kajian tentang kesan ketidaksamaan terhadap taburan *t* terus dijalankan dari semasa ke semasa. Kajian awal dilakukan oleh Neyman dan Pearson [2] yang mengkaji tentang kesan ketidaksamaan terhadap taburan *t* merangkumi skop yang luas. Daripada hasil kajian, mereka berpendapat bahawa kepencongan memberi lebih kesan ke atas taburan *t* berbanding dengan kurtosis.

[1,2&3] Jabatan Matematik, Fakulti Sains, Universiti Teknologi Malaysia, 81310 UTM Skudai, Johor

Kajian mereka juga melibatkan tentang kegunaan $|t|$ terhadap selang keyakinan min $\bar{\mu}$ mengurangkan kesan kepencongan yang mana hasil yang diperolehi adalah kegunaan $|t|$ hanya sesuai bagi populasi yang terpencong sedikit sahaja. Hasil kajian mereka juga menunjukkan bahawa populasi yang terpencong positif boleh berubah menjadi terpencong negatif dengan taburan t dan begitulah sebaliknya. Kajian ke atas kesan kepencongan terhadap taburan t dilakukan juga oleh Rider [3], Perlo [4] dan Laderman [5], tetapi tumpuan kajian mereka diberikan kepada saiz sampel yang amat kecil. Walau bagaimanapun, hasil mereka ini kurang digunakan oleh pengguna-pengguna statistik disebabkan oleh faktor saiz sampel yang terlalu kecil dan terhad untuk taburan yang tertentu sahaja.

Kajian-kajian yang sama terus dilakukan pada setengah abad berikutnya. Scheffe [6] dan Bradley [7] menunjukkan bahawa ujian-t mampu dilakukan dengan sempurna terhadap ketidaknormalan jika saiz sampelnya tak terhingga. Bradley [8] seterusnya mempertimbangkan saiz sampel yang di perlukan bagi mencapai tahap keteguhan bagi Kebarangkalian Ralat Jenis I yang sebenar terhadap Kebarangkalian Ralat Jenis I nominal. Walau bagaimanapun, kajian beliau ini hanya tertumpu kepada satu populasi yang berbentuk L. Lee dan Gurland [9] menyimpulkan bahawa saiz sebenar bagi ujian-t bergantung kepada faktor tambahan seperti kepencongan atau kurtosis apabila taburan dasarnya adalah campuran taburan normal. Hal yang serupa dilakukan oleh Johnson [10] yang mempertimbangkan faktor kepencongan bagi melakukan ujian-t apabila taburan induknya terpencong. Pocock [11] menunjukkan bahawa bagi sesetengah populasi induk yang terlalu terpencong, ujian-t satu sampel tidak terlalu sesuai kecuali bagi saiz sampel yang terlalu besar. Kajian-kajian lain yang mengkaji kesan ketidaknormalan terhadap taburan t termasuklah kerja-kerja yang dilakukan oleh Tiku [12], Sansing dan Owen [13] serta Chaffin dan Rhiel [14].

Berdasarkan kepada kajian-kajian tersebut, beberapa pemboleh ubah yang diperolehi hasil daripada pengubahsuaian pemboleh ubah t digunakan bagi menguji taburan terpencong bergantung kepada kesesuaiannya. Bermula daripada pemboleh ubah awal, iaitu Sutton-t [1], pemboleh ubah ini didapati sesuai bagi saiz sampel yang besar dan taburan yang kurang terpencong. Menyedari bahawa pemboleh ubah awal yang digunakan bagi menguji min taburan terpencong bagi saiz sampel yang besar, ini mendorong Johnson [10] mengubahsuai pemboleh ubah t supaya sesuai digunakan bagi saiz sampel tidak terlalu besar seperti sebelumnya. Sebutan t ini berbeza daripada pemboleh ubah t yang biasa disebabkan pembilangnya diubahsuai. Beliau menggantikan sebagai pembilang bagi pemboleh ubah t dengan beberapa sebutan pertama kembangan Cornish-Fisher. Hasil pengubahsuaian Johnson [10] ini digambarkan oleh persamaan

$$t_1 = \left((\bar{x} - \mu) + \mu_3 / (6\sigma^2 N) + \mu_3 (\bar{x} - \mu)^2 / (3\sigma^4)\right) \Big/ \sqrt{s^2 / N} \qquad (1)$$

dengan m_3 ialah momen pusat ke-3 bagi populasi. Pengubahsuaian ini membetulkan kesan kepincangan dan kepencongan yang disebabkan oleh kepencongan bagi taburan populasi yang tak normal dan t_1 adalah menghampiri taburan t_{n-1} (Johnson [10] dan Sutton [1]). Pemboleh ubah t_1 ini sesuai digunakan bagi sebarang taburan induk yang terpencong dan sesuai bagi saiz sampel yang kecil, sekecil 13. Walau bagaimanapun, keupayaan kaedah Johnson [10] ini menjadi kurang tepat apabila saiz sampel bertambah kecil dan taburan yang terlalu terpencong seperti yang dinyatakan oleh Wilcox [15], Sutton [1] dan Chen [16].

Pemboleh ubah t digunakan bagi taburan yang kurang terpencong dan saiz sampel yang besar sementara pemboleh ubah t_1 pula sesuai bagi taburan terpencong dengan saiz sampel yang kecil, sekitar 13 (Johnson[10]). Dalam situasi sebenar, kepencongan bagi taburan induk boleh jadi lebih besar daripada taburan dengan kepencongan seperti yang dicadangkan oleh Johnson [10] dan kemungkinan juga saiz sampel bersamaan dengan 10, iaitu kurang daripada 13 seperti yang dicadangkan oleh Johnson [10]. Hal ini menarik minat Chen [17] untuk mendapatkan satu pemboleh ubah lain yang mampu untuk memenuhi ciri-ciri yang tidak terdapat pada pemboleh ubah t mahupun pemboleh ubah t_1. Bagi menghasilkan pemboleh ubah t_2 ini, Chen [17] menggunakan kembangan Edgeworth. Hasil yang diperolehi oleh Chen [17] ini diberi oleh

$$t_2 = t + a(1 + 2t^2) + 4a^2(t + 2t^3) = t_1 + 4a^2(t + 2t^3) \tag{2}$$

dengan $a = \beta_1 / (6\sqrt{n})$ dan $\beta_1 = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})^3 / s^3$.

Hasil simulasi yang dijalankan oleh Chen [17] juga mendapati bahawa pemboleh ubah t_2 ini sesuai bagi taburan yang terpencong positif dengan saiz sampel yang kecil, iaitu 10. Pemboleh ubah t_2 ini juga didapati sesuai digunakan bagi ujian satu hujung sebelah kanan.

2.0 KAEDAH MENERBITKAN PEMBOLEH UBAH PENGUBAH-SUAIAN t MENGGUNAKAN PENGANGGAR PENGURANG-AN KEPINCANGAN BOOTSTRAP (t_3)

Pemboleh ubah t_3 yang diterbitkan berasal daripada pemboleh ubah t. Kaedah yang digunakan untuk menerbitkan pemboleh ubah t_3 adalah dengan melakukan suatu penjelmaan terhadap min dengan menggunakan penganggar pengurangan kepincangan *bootstrap*.

2.1 Pemboleh ubah t

Katalah $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah tak bersandar dan masing-masing tertabur normal dengan min μ dan sisihan piawai σ dengan dua statistik $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ dan $\chi^2 = \dfrac{nS^2}{\sigma^2}$. Daripada persamaan ini, diketahui bahawa $Z \sim N(0,1)$ kerana

$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ dan diketahui juga χ^2 mempunyai taburan kuasa dua khi dengan $(n-1)$ darjah kebebasan dan Z dan χ^2 adalah tak bersandar.

Oleh itu, dari takrif pemboleh ubah $t = Z\Big/\sqrt{\chi^2/\nu}$, didapati

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma}{\sqrt{\frac{nS^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}$$

$$= \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X}-\mu)}{S} \qquad (3)$$

Min bagi sampel dan min bagi populasi daripada persamaan (3) ini dianggarkan menggunakan penganggar pengurangan kepincangan *bootstrap*.

2.2 Penganggar Pengurangan Kepincangan *Bootstrap*

Secara formalnya, apabila diberi fungsi f_t daripada kelas $\{f_t : t \in \tau\}$ dan bagi mendapatkan nilai t_0 terhadap t, persamaan populasi yang diberi di bawah diselesaikan:

$$E\{f_t(F_0, F_1) \mid F_0\} = 0 \qquad (4)$$

dengan F_0 mewakili fungsi taburan populasi dan F_1 merupakan fungsi taburan bagi sampel. Andaikan $\mu = \int x dF_0(x)$ mewakili min populasi dan $\theta_0 = \theta(F_0) = \mu^3$ dianggarkan sebagai kuasa ke-3 bagi min sementara $\hat{\theta} = \theta(F_1)$ sebagai anggaran *bootstrap* bagi θ_0 dengan F_1 adalah fungsi taburan keseluruhan bagi sampel.

Pembetulan $\hat{\theta}$ bagi kepincangan adalah serupa untuk mencari nilai bagi t_0 yang menyelesaikan persamaan (4) apabila

$$f_t(F_0, F_1) = \theta(F_1) - \theta(F_0) + t. \qquad (5)$$

Anggaran pembetulan kepincangan menjadi $\hat{\theta} + t_0$. Jika diubah pasangan (F_0, F_1) dalam persamaan (4) dengan (F_1, F_2), maka persamaan (4) dijelmakan menjadi persamaan sampel yang diberi oleh:

$$E\{f_t(F_1, F_2) \mid F_1\} = 0. \qquad (6)$$

Jika fungsi bagi f_t diberi oleh persamaan (5), maka persamaan sampel (6) menjadi $E\{\theta(F_2) - \theta(F_1) + t \mid F_1\} = 0$ yang mana penyelesaiannya adalah

$$t = \hat{t}_0 = \theta(F_1) - E\{\theta(F_2) \mid F_1\}$$

Oleh itu, penganggar pengurangan kepincangan *bootstrap* diberi oleh:

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta} + \hat{t}_0 = 2\theta(F_1) - E\{\theta(F_2) \mid F_1\} \tag{7}$$

Maka,

$$E\{\theta(F_1) \mid F_0\} = E(\bar{X}^3) = \mu^3 + \frac{3\mu\sigma^2}{n} + \frac{\gamma}{n^2} \tag{8}$$

dengan $\sigma^2 = E(X_1 - \mu)^2$ dan $\gamma = E(X_1 - \mu)^3$ mewakili varians dan kepencongan populasi, masing-masing. Bagi persamaan sampel pula, persamaan (8) dianalogikan terus menjadi

$$E\{\theta(F_2) \mid F_1\} = \bar{X}^3 + \frac{3\bar{X}\hat{\sigma}^2}{n} + \frac{\hat{\gamma}}{n^2} \text{ dengan } \hat{\sigma}^2 = n^{-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$$

dan $\hat{\gamma} = n^{-1}\sum(X_i - \bar{X})^3$

mewakili varians dan kepencongan sampel, masing-masing. Oleh itu, penganggar pengurangan kepincangan *bootstrap* seperti yang dinyatakan dalam persamaan (7) diberi oleh Hall [18]:

$$\hat{\theta}_1 = 2\theta(F_1) - E\{\theta(F_2) \mid F_1\} = \bar{X}^3 - \frac{3\bar{X}\hat{\sigma}^2}{n} - \frac{\hat{\gamma}}{n^2} \tag{9}$$

2.3 Pemboleh ubah t_3

Dari persamaan (3), min bagi sampel dianggarkan menggunakan persamaan (9) sementara min bagi populasi pula dianggarkan menggunakan persamaan (8). Oleh yang demikian, pemboleh ubah t_3 adalah pemboleh ubah t yang dijelmakan menjadi

$t_3 = \sqrt{n-1}(\hat{\theta}_1 - \theta_0)/S$ dengan $\hat{\theta}_1 = \bar{X}^3 - 3n^{-1}\bar{X}S^2 - n^{-2}\hat{\gamma}$ dan

$\theta_0 = \mu^3 - 3n^{-1}\mu\sigma^2 - n^{-2}\gamma$, ataupun ringkasnya (*lihat* Rasidah [19]),

$$t_3 = t\left(1 + p + \frac{3}{n}\right) + \frac{\sqrt{n-1}}{nS}\left(3q + \frac{r}{n}\right)$$

dengan $p = \bar{X}^2 - \mu^2 + 3\bar{X}\mu - 1$, $q = \mu(\sigma^2 + 1) - \bar{X}(S^2 + 1)$ dan $r = \gamma - \hat{\gamma}$ (*Sila lihat* Lampiran A).

3.0 SIMULASI MONTE CARLO

Pemboleh ubah rawak dijanakan daripada pelbagai taburan terpencong dengan nilai koefisien kepencongan yang tertentu. Tatatanda Mood *et al.,* [20] digunakan untuk mengenal pasti semua taburan dan nilai koefisien kepencongannya. Taburan terpencong yang digunakan adalah taburan eksponen (λ = 1), kuasa dua khi (n = 1) dan taburan Weibull (a = 0.8 dan b = 1). Sebanyak 100 000 sampel rawak dijanakan bagi setiap sampel yang mempunyai saiz yang terletak di antara 5 hingga 20. Nilai sampel rawak yang terlalu besar ini digunakan supaya sampel rawak yang diambil menghampiri keadaan sebenar. Data tersebut seterusnya dianalisis dan diuji kesesuaiannya terhadap penguji statistik t_1, t_2, dan t_3 bergantung kepada saiz sampel dan keadaan kepencongan taburan. Disebabkan ujian yang dilakukan ialah ujian satu hujung sebelah kiri, maka penguji statistik tidak digunakan kerana pemboleh ubah ini hanya sesuai digunakan untuk melakukan ujian satu hujung sebelah kanan sahaja.

Simulasi ini dilakukan menggunakan bahasa pengaturcaraan Fortran77 berserta dengan rutin NAG (*Numerical Algorithma Group*). Program Fortran ini ditulis dan dilaksanakan menggunakan komputer IBM ES/9672-R21 dengan sistem VM/ESA online (Version 2 Release 2). Sampel rawak dijanakan daripada taburan seragam dengan rutin G05CBF. Kes nul $\mu_x = \mu_0$ dipertimbangkan bagi melakukan pengujian Kebarangkalian Ralat Jenis I.

4.0 KEPUTUSAN

Keputusan dari simulasi di atas digambarkan dalam Jadual 1 berikut:

Dari Jadual 1, bagi n=5 didapati statistik memberikan nilai yang paling rendah berbanding dengan statistik t dan t_1. Nilai yang paling rendah sekali diberikan oleh

Jadual 1 Kebarangkalian Ralat Jenis I bagi ujian satu hujung sebelah kiri (α = 0.01)

Taburan (kepencongan)	***n*=5**	***n*=10**	***n*=15**	***n*=20**
eksponen (1)	.072	.063	.054	.047
(2.00)	.045	.030	.022	.018
	.021	.090	.121	.139
Weibull (0.8,1)	.078	.056	.040	.030
(2.81)	.044	.022	.014	.010
	.008	.012	.041	.056
kuasa dua khi (1)	.127	.100	.084	.074
(2.83)	.056	.018	.021	.018
	.010	.032	.090	.129

Nota: Data adalah kadar bagi sampel yang ditolak daripada 100,000 replikasi Monte Carlo untuk ujian t, t_1 dan t_3 (data pertama, kedua dan ketiga daripada setiap set) dengan rantau genting $t_{\alpha,n-1}$.

taburan Weibull dengan perbezaan 0.002 lebih rendah daripada aras keertian nominal sedangkan taburan kuasa dua khi mempunyai ralat yang sama dengan aras keertian nominal. Sementara itu, ralat yang diberikan oleh t dan t_1 pula didapati lebih tinggi daripada aras keertian nominal dan tidak memberikan hasil yang baik. Bagi kes n=10, 15 dan 20 pula, kesemua ralat yang di paparkan menunjukkan nilai yang lebih tinggi daripada aras keertian nominal. Bagi n=10, statistik t_3 bagi taburan Weibull masih lagi memberikan hasil yang baik dengan diikuti oleh statistik t_1 bagi taburan kuasa dua khi. Bagi nilai n yang besar, iaitu n=15 dan 20, didapati statistik t_1 pula memberikan hasil yang baik berbanding dengan statistik t dan t_3.

Jadual 2 memaparkan Kebarangkalian Ralat Jenis I dengan aras keertian 0.05. Walaupun statistik t_3 bagi taburan eksponen memberikan ralat 0.017 lebih tinggi dari pada aras keertian nominal, tetapi ralat ini masih lagi memberikan hasil yang baik berbanding dengan statistik t dan t_1 untuk ketiga-tiga taburan yang terlibat. Bagi n=10 pula, statistik t_3 bagi taburan Weibull masih lagi memberikan hasil yang baik diikuti dengan statistik t_1 bagi taburan kuasa dua khi dengan perbezaan sebanyak 0.007 lebih tinggi daripada aras keertian nominal. Apabila n besar, iaitu n=15 dan 20, didapati bahawa statistik t_1 pula memberikan hasil yang lebih baik berbanding dengan t dan t_3 terutama sekali bagi taburan Weibull.

Jadual 2 Kebarangkalian Ralat Jenis I bagi ujian satu hujung sebelah kiri ($\alpha = 0.05$)

Taburan (kepencongan)	***n*=5**	***n*=10**	***n*=15**	***n*=20**
eksponen (1)	.157	.133	.118	.109
(2.00)	.114	.087	.074	.067
	.067	.166	.198	.216
Weibull (0.8,1)	.154	.109	.084	.067
(2.81)	.103	.064	.046	.036
	.017	.040	.088	.106
kuasa dua khi (1)	.218	.176	.154	.140
(2.83)	.079	.057	.075	.070
	.022	.084	.182	.225

Nota: Data adalah kadar bagi sampel yang ditolak daripada 100,000 replikasi Monte Carlo untuk ujian t, t_1 dan t_3 (data pertama, kedua dan ketiga daripada setiap set) dengan rantau genting $t_{\alpha,n-1}$.

Nilai bagi Kebarangkalian Ralat Jenis I dengan aras keertian 0.10 ditunjukkan dalam Jadual 3. Daripada data-data yang dipamerkan menunjukkan bahawa bagi n=5, statistik t_3 bagi taburan Weibull dan kuasa dua khi memberikan ralat yang sangat rendah. Ralat bagi statistik t_3 untuk taburan eksponen didapati menghampiri aras keertian nominal dengan perbezaan sebanyak 0.006 lebih tinggi daripada aras keertian nominal sementara statistik t dan t_1 memberikan ralat yang sangat tinggi. Ini berbeza apabila keadaan n=10 yang mana hanya statistik t_3 bagi taburan Weibull masih lagi

Jadual 3 Kebarangkalian Ralat Jenis I bagi ujian satu hujung sebelah kiri ($\alpha = 0.10$)

Taburan (kepencongan)	***n*=5**	***n*=10**	***n*=15**	***n*=20**
eksponen (1)	.219	.190	.174	.163
(2.00)	.182	.145	.128	.122
	.106	.214	.246	.262
Weibull (0.8,1)	.205	.151	.120	.100
(2.81)	.163	.108	.083	.069
	.024	.068	.127	.143
kuasa dua khi (1)	.279	.231	.208	.193
(2.83)	.200	.150	.135	.128
	.031	.141	.251	.289

Nota: Data adalah kadar bagi sampel yang ditolak daripada 100,000 replikasi Monte Carlo untuk ujian t, t_1 dan t_3 (data pertama, kedua dan ketiga daripada setiap set) dengan rantau genting $t_{\alpha,n-1}$.

memberikan ralat yang kecil berbanding dengan statistik lain bagi taburan-taburan lain. Statistik t_1 bagi taburan Weibull ini juga memberikan nilai ralat yang paling rendah bagi n=15 dan 20. Statistik lain bagi taburan lain menunjukkan nilai yang jauh berbeza dengan aras keertian nominal untuk dibuat perbandingan. Walau bagaimanapun, statistik t bagi taburan Weibull memberikan nilai ralat yang serupa dengan aras keertian nominal bagi kes n=20.

5.0 KESIMPULAN

Secara keseluruhannya, simulasi yang telah dijalankan terhadap Kebarangkalian Ralat Jenis I memberikan hasil yang memuaskan. Daripada simulasi yang telah dijalankan terhadap Kebarangkalian Ralat Jenis I menunjukkan bahawa statistik t_3 mampu mengurangkan Kebarangkalian Ralat Jenis I bagi taburan yang mempunyai kepencongan lebih daripada 2, iaitu taburan Weibull dan kuasa dua khi bagi saiz sampel yang kecil, iaitu n=5 untuk semua aras keertian yang dikaji. Bagi taburan Weibull, statistik t_3 ini juga didapati sesuai bagi n=10. Walau bagaimanapun, statistik t_1 pula sesuai bagi saiz sampel, dan n=20 bagi taburan Weibull dan kuasa dua khi. Hasil ini adalah bersesuaian dengan kajian yang telah dijalankan oleh Johnson [10] dan Sutton [1] yang mana kajian mereka mendapati bahawa t_1 sesuai apabila n terletak di sekitar 13. Sementara itu, statistik t tidak menunjukkan hasil yang baik bagi semua saiz sampel dan taburan yang dikaji. Daripada literatur yang telah dijalankan menunjukkan bahawa statistik t adalah sesuai bagi taburan yang kurang terpencong dan saiz sampel yang besar, sedangkan kajian ini tertumpu kepada taburan yang sangat terpencong, yang mempunyai kepencongan lebih besar dan sama dengan 2 serta saiz sampel yang ditentukan, n=5, 10, 15 dan 20. Berdasarkan faktor inilah menyebabkan statistik t tidak memberikan keputusan yang baik.

PENGHARGAAN

Penulis ingin merakamkan penghargaan kepada Pusat Pengurusan Penyelidikan (RMC), Univerisiti Teknologi Malaysia yang telah membiayai penyelidikan ini di bawah Vot 71710.

RUJUKAN

[1] Sutton, C.D. 1993. Computer-Intensive Method for Test about the Mean of an Asymmetrical Distribution. *Journal of the American Statistical Association*. 88(423): 802-810.

[2] Neyman, J. dan E.S. Pearson. 1928. On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference, Part I. *Biometrika*. 20A.: 175-240.

[3] Rider, P.R. 1929. On the Distribution of the Ratio of Mean to Standard Deviation in Small Samples From Non-Normal Universes. *Biometrika*. 21: 124-143.

[4] Perlo, V. 1933. On the Distribution of Student's Ratio for Samples of Three Drawn From Rectangular Distribution. *Biometrika*. 25: 203-204.

[5] Laderman, J. 1939. The Distribution of 'Student's' Ratio for Samples of Two Items Drawn From Non-Normal Universes. *Annals of Mathematical Statistics*. 10: 376-379.

[6] Scheffe. H. 1959. *The Analysis of Variance*. New York: Wiley.

[7] Bradley, J.V. 1968. Study in Research Methodology. *Dissertation Abstracts*. 28: 4815B-4816B. Dalam Chaffin, W.W. dan Rhiel, G.S. 1993. The Effect of Skewness And Kurtosis on the One-Sample *t*-test and the Impact of Knowledge of the Population Standard Deviation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 46: 79-90.

[8] Bradley, J.V. 1980. Nonrobustness in *Z, t* and *F* Test at Large Sample Sizes. *Bulletin of the Psychonomic Society*. 16(5): 333-336.

[9] Lee, A.F.S. dan J. Gurland. 1977. One-Sample *t*-Test When Sampling From a Mixture of Normal Distributions. *The Annals of Statistics*. 5(4): 803-807.

[10] Johnson, N.J. 1978. Modified *t* Test and Confidence Intervals for Asymmetrical Populations. *Journal of the American Statistical Association*. 73(363): 536-544.

[11] Pocock, S.J. 1982. When Not to Rely on the Central Limit Theorem - An Example From Absentee Data. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. 11(19): 2169-2179.

[12] Tiku, M.L. 1971. Student's *t* Distribution Under Nonnormal Situations. *Australian Journal of Statistics*. 13: 142-148.

[13] Sansing, R.C. dan D.B. Owen. 1974. The Density of the *t*-Statistic for Nonnormal Distributions. *Communication in Statistics*. 3(2): 139-155.

[14] Chaffin, W.W. dan G.S. Rhiel. 1993. The Effect of Skewness And Kurtosis on the One-Sample *t*-test and the Impact of Knowledge of the Population Standard Deviation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 46: 79-90.

[15] Wilcox, R.R. 1990. Comparing the Means of Two Independent Groups. Biometrical Journal. 771-780. Dalam Guo, Jiin-Huarng dan Luh, Wei-Ming. 2000. Normalized Johnson's Transformation One-Sample Trimmed *t* For Non-Normality. *Journal of Applied Statistics*. 27(2): 197-203.

[16] Chen, Ling. 1994. A Note on Sutton's Composite Test For the Mean of Asymmetrical Distributions. *Journal of Statistical Computation And Simulation*. 49(3-4): 244-249.

[17] Chen, Ling. 1995. Testing the Mean of Skewed Distributions. *Journal of the American Statistical Association*. 90(430): 767-772.

[18] Hall, P. 1992. *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. United States of America: Springer-Verlag New York, Inc.

[19] Mood, A.M., F.A. Graybill dan D.C. Boes. 1974. *Introduction to the Theory of Statistics*. 3rd. ed., New York: McGraw-Hill, Inc. 112.

LAMPIRAN A

$$
\begin{aligned}
t_3 &= \frac{\sqrt{n-1}\left[(\bar{X}^3 - 3n^{-1}\bar{X}S^2 - n^{-2}\tilde{\gamma}) - (\mu^3 - 3n^{-1}\mu\sigma^2 - n^{-2}\gamma)\right]}{S} \\
&= \frac{\sqrt{n-1}}{S}\left[(\bar{X}^3 - \mu^3) + \frac{3}{n}(\mu\sigma^2 - \bar{X}S^2) + \frac{1}{n^2}(\gamma - \hat{\gamma})\right] \\
&= \frac{\sqrt{n-1}}{S}\{(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)\left[(\bar{X} - \mu)^2 + 3\bar{X}\mu - 1\right] + \\
&\quad \frac{3}{n}\left[(\bar{X} - \mu) + \mu(\sigma^2 + 1) - \bar{X}(S^2 + 1)\right] + \frac{1}{n^2}(\gamma - \hat{\gamma})\} \\
&= \frac{\sqrt{n-1}}{S}\{(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)\left[\bar{X}^2 - \mu^2 + 3\bar{X}\mu - 1\right] + \\
&\quad \frac{3}{n}\left[(\bar{X} - \mu) + \mu(\sigma^2 + 1) - \bar{X}(S^2 + 1)\right] + \frac{1}{n^2}(\gamma - \hat{\gamma})\} \\
&= \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X} - \mu)}{S} + \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X} - \mu)}{S}\left[\bar{X}^2 - \mu^2 + 3\bar{X}\mu - 1\right] + \\
&\quad \frac{3}{n}\left[\frac{\sqrt{n-1}(\bar{X} - \mu)}{S} + \frac{\sqrt{n-1}}{S}(\mu(\sigma^2 + 1) - \bar{X}(S^2 + 1))\right] + \frac{\sqrt{n-1}}{n^2 S}(\gamma - \hat{\gamma}).
\end{aligned}
$$

Daripada persamaan t yang diberi oleh persamaan (3), pemboleh ubah t_3 boleh dinyatakan dalam bentuk pemboleh ubah t menjadi:

$$
t_3 = t + t\left[\bar{X}^2 - \mu^2 + 3\bar{X}\mu - 1\right] + \frac{3}{n}\left[t + \frac{\sqrt{n-1}}{S}\left(\mu(\sigma^2 + 1) - \bar{X}(S^2 + 1)\right)\right] + \frac{\sqrt{n-1}}{n^2 S}(\gamma - \hat{\gamma}).
$$

Persamaan di atas boleh dimudahkan dengan menggantikan $p = \bar{X}^2 - \mu^2 + 3\bar{X}\mu - 1$, $q = \mu(\sigma^2 + 1) - \bar{X}(S^2 + 1)$ dan $r = \gamma - \hat{\gamma}$. Oleh itu,

$$
\begin{aligned}
t_3 &= t + pt + \frac{3}{n}\left[t + \frac{\sqrt{n-1}}{S}q\right] + \frac{\sqrt{n-1}}{n^2 S}r \\
&= t\left(1 + p + \frac{3}{n}\right) + \frac{\sqrt{n-1}}{nS}\left(3q + \frac{r}{n}\right).
\end{aligned}
$$