Jurnal Teknologi, 36(C) Jun. 2002: 13–40

PENGANGGARAN KEKARDINALAN SET PENYELESAIAN PERSAMAAN KONGRUEN

SITI HASANA SAPAR & KAMEL ARIFFIN MOHD ATAN

Abstrak. Katakan $\underline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ suatu vektor dalam ruang Z^n dengan Z menandakan gelanggang integer. Katakan q integer positif dan f suatu polinomial dalam $\underline{X}$ berpekalikan unsur dalam Z. Hasil tambah eksponen yang disekutukan dengan f ditakrifkan sebagai $S(f;q) = \sum e^{\frac{2\pi i f}{q}}$ yang dinilaikan bagi semua nilai x di dalam set reja lengkap modulo q. Nilai $S(f;q)$ adalah bersandar kepada penganggaran bilangan unsur $|V|$ yang terdapat dalam set

$$V = \{\underline{X} \bmod q \mid \underline{f}_{\underline{X}} \equiv \underline{0} \bmod q\}$$

dengan $\underline{f}_{\underline{X}}$ menandakan polinomial-polinomial terbitan separa f terhadap $\underline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Dalam makalah ini perbincangan kami ditumpukan kepada kaedah penganggaran $|V|$ yang disekutukan dengan polinomial f dalam dua pemboleh ubah (x , y) berpekali integer. Perbincangan dimulakan dengan polinomial f yang linear dan seterusnya meningkat sehingga polinomial f berdarjah tiga. Pendekatan yang dilakukan ialah dengan menggunakan kaedah p-adic dan Polihedron Newton yang disekutukan dengan polinomial-polinomial terbabit.

Kata Kunci: penganggaran kekardinalan, persamaan kongruen, kaedah p-adic, kaedah polihedron Newton

Abstract. Let $\underline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ be a vector in a space Z^n with Z ring of integers and let q be a positive integer and f a polynomial in $\underline{X}$ with coefficients in Z. The exponential sum associated to f is defined as $S(f;q) = \sum e^{\frac{2\pi i f}{q}}$, where the sum is taken over a complete set of residues modulo q.

The value of $S(f;q)$ depends on the estimation of the number $|V|$, the number of elements contained in the set

$$V = \{\underline{X} \bmod q \mid \underline{f}_{\underline{X}} \equiv \underline{0} \bmod q\}$$

with $\underline{f}_{\underline{X}}$ as the partial derivative of f with respect to $\underline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

* Jabatan Matematik, Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia. e-mail: sitihas@fsas.upm.edu.my

This paper discusses the problem of determining the common zeroes of two variable polynomials in cases where overlapping occurs at vertices and line segments of indicator diagrams associated with second and third degree polynomials. Subsequently estimations for of an exponential sum for these polynomials are arrived at. The approach is done by using p-adic method and the Newton Polyhedron technique associated with these polynomials.

Keywords: Cardinality estimation, congruence equation, p-adic method, newton polyhedron technique

1.0 PENGENALAN

Dalam perbincangan kita ini Z_p, Ω_p, $ord_p x$ masing-masing menandakan gelanggang integer p-adic, medan nombor nisbah p-adic dan kuasa tertinggi bagi p yang membahagi x. Bagi sebarang perdana p, $\underline{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ menandakan vektor n-polinomial dengan pekali dari Z_p set integer p-adic dan $\underline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

$N(\underline{f}; p^\alpha)$ pula menandakan kekardinalan set $V = \{\underline{u} \bmod q \mid f_i(\underline{u}) \equiv \underline{0} \bmod p^\alpha$, i=1, 2, ..., n} dengan $\alpha > 0$ dan $\underline{u}$ mengambil nilai dalam set reja lengkap modulo p^α.

Penganggaran nilai $N(\underline{f}; p^\alpha)$ menjadi tumpuan penyelidikan ramai para penyelidik teori nombor dalam usaha mencari anggaran terbaik kepada hasiltambah eksponen berganda

$$S(\underline{f}; q) = \sum_{\underline{x} \bmod q} \text{eks}\left(\frac{2\pi i \underline{f}}{q}\right)$$

Di sini $f(\underline{x})$ merupakan polinomial berpekali integer dan hasil tambah ini adalah di atas nilai-nilai x set reja lengkap modulo integer positif q. Seperti yang ditunjukkan oleh K.A. Atan [8] anggaran $|S(f; p^\alpha)|$ diberikan oleh

$$\left|S(\underline{f}; p^\alpha)\right| \le p^{n(\alpha-\theta)} N(\underline{f}; p^\theta)$$

dengan $\theta = \left[\dfrac{\alpha}{2}\right]$

Katakan K medan nombor aljabar yang dijanakan oleh ξ_i, i $\ge$ 1 pensifar kepada $f(x)$ dalam $Z[x]$. Loxton dan Smith [2] telah menunjukkan bahawa

$$N(f; p) \le mp^{\alpha - \left(\frac{\alpha-\delta}{e}\right)}$$

jika $\alpha > \delta$. Di sini m adalah bilangan punca berlainan $f(x)$ dan $\delta = ord_p D(f)$ dengan $D(f)$ merupakan persilangan unggulan pecahan K yang dijanakan oleh

$$\frac{f^{(e_i)}(\xi_i)}{e_i\,!}, \qquad i \geq 1$$

dengan e_i gandaan pensifar ξ_i.

Chalk dan Smith [1] memperolehi hasil yang berbentuk sama dengan δ = maks $ord_p f_i$ dengan f_i pekali Taylor

$$\frac{f^{(e_i)}(\xi_i)}{e_i\,!}$$

pada pensifar-pensifar ξ_i yang berlainan.

Loxton dan Smith [2] menunjukkan bahawa bagi $\underline{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$

$$N\left(\underline{f}; p^{\alpha}\right) \leq \begin{cases} p^{n\alpha} & \text{jika} \quad \alpha \leq 2\delta \\ \left(Drjh\,\underline{f}\right) p^{n\delta} & \text{jika} \quad \alpha > 2\delta \end{cases}$$

dengan $\delta = ord_p \Delta\left(\underline{f}\right), \Delta\left(\underline{f}\right)$ menandakan pembeza layan $\underline{f}$ dan $Drjh$ $\underline{f}$ ialah darjah polinomial $\underline{f}$.

K.A. Atan [3] mengkaji polinomial $\underline{f} = \left(f_x, f_y\right)$ dengan f_x, f_y pembezaan separa terhadap x dan y bagi

$$f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cx + dy + e$$

dengan pekali dalam Z_p dan telah memperolehi

$$N\left(f_x, f_y; p^{\alpha}\right) \leq \begin{cases} p^{2\alpha} & \text{jika} \quad \alpha \leq \delta \\ 4p^{\alpha+\delta} & \text{jika} \quad \alpha > \delta \end{cases}$$

dengan $\delta = \text{maks}\left\{ord_p 3a, \frac{3}{2} ord_p b\right\}$

K.A. Atan dan I. Abdullah [6] yang mengkaji pula polinomial

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + dy^3 + kx + my + n$$

telah memperolehi hasil yang berbentuk sama dengan

$$\delta = \text{maks}\{ord_p\, 3a,\, ord_p\, b\}$$

Kedua-duanya kemudian mengkaji polinomial yang sama dan telah dapat menunjukkan bahawa bersandar kepada sebutan utama dalam f, iaitu

$$\delta = \text{maks}\{ord_p\, 3a,\, ord_p\, b,\, ord_p\, c,\, ord_p\, 3d\}$$

K.L. Chan dan K.A. Atan [9] meneliti polinomial berbentuk

$$f(x, y) = ax^4 + bx^3 y + cx^2 y^2 + dxy^3 + ey^4 + mx + ny + k$$

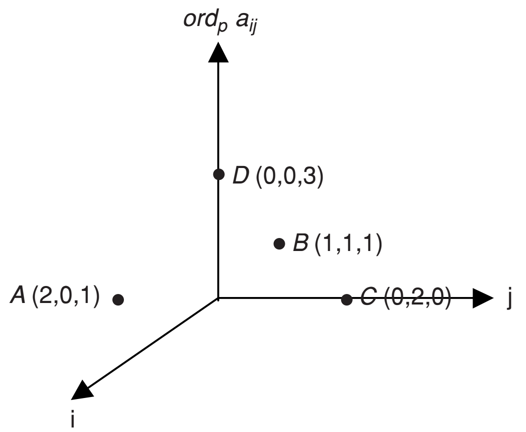
dan telah memperolehi hasil yang berbentuk sama dengan

$$\delta = \text{maks}\{ord_p\, a,\, ord_p\, b,\, ord_p\, d,\, ord_p\, e\}$$

bagi $p > 3$.

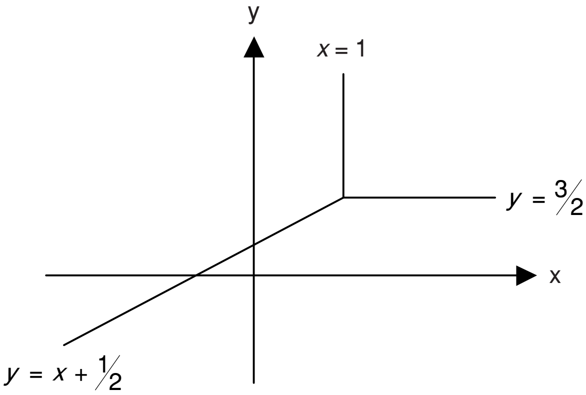
Katakan $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ polinomial berpekali integer dan p perdana. Polihedron Newton bagi $f(x, y)$ terdiri daripada satah cembung bawah yang menampung di ruang atasnya dan juga yang terletak di atasnya titik $(i, j, ord_p\, a_{ij})$ dengan kuasa p tertinggi yang membahagi a_{ij} adalah $ord_p\, a_{ij}$. Gambar rajah penunjuk yang dikaitkan dengan suatu Polihedron Newton terdiri daripada sisi-sisi yang mencantumkan titik (μ_j, λ_j), $j > 1$ yang mewakili vektor normal $(\mu_j, \lambda_j, 1)$ kepada satah-satah di dalam Polihedron Newton berkenaan.

Rajah 1 memberikan contoh Polihedron Newton dan gambar rajah penunjuk yang berkaitan bagi polinomial $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + y^2 + 27$ dengan $p = 3$.



Rajah 1 Polihedron Newton yang dikaitkan dengan polinomial $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + y^2 + 27$ dengan p = 3

Gambar rajah penunjuk yang terhasil daripada Polihedron Newton adalah seperti berikut:



Rajah 2 Gambar rajah penunjuk yang dikaitkan dengan Polihedron Newton yang berasal dari polinomial $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + y^2 + 27$; dengan p = 3

Kaedah Polihedron Newton ini telah dibangunkan oleh K.A. Atan dan Loxton [5]. Kaedah ini telah digunakan oleh K.A. Atan [4], K.A. Atan dan Abdullah [7], K.A. Atan dan Chan [9] juga K.A. Atan dan Heng [10] untuk mendapatkan anggaran pensifar p-adic bagi dua polinomial.

Dalam kaedah mereka, gabungan gambar rajah penunjuk yang disekutukan dengan polihedron Newton setiap polinomial yang dikaji telah diteliti. Dalam penulisan mereka K.A. Atan dan Loxton [5] telah meneliti persilangan-persilangan mudah sahaja, bagi gambar rajah penunjuk polinomial-polinomial yang dikaji. Bagi persilangan yang lebih rumit mereka menggunakan kaedah jelmaan.

Dalam [5] K.A. Atan dan Loxton menyatakan seperti berikut:

Teorem 1.1

Katakan f dan g polinomial berpekali integer p-adic, dengan p menandakan integer perdana. Katakan (μ, λ) titik persilangan gambar rajah-gambar rajah penunjuk bagi f dan g yang bukan pada bucu kedua-dua gambar rajah. Katakan juga sisi-sisi yang (μ, λ) di atasnya tidak bertindih. Maka wujud ξ dan η dalam Ω_p yang menjadi pensifar f dan g sedemikian hingga $ord_p\, \xi = \mu$, $ord_p\, \eta = \lambda$.

Dalam makalah ini, dibentangkan kajian kami terhadap gabungan gambar rajah-gambar rajah penunjuk yang mempunyai ciri bersilang di bucu dan sisi-sisi bertindih. Polinomial yang dikaji adalah berdarjah rendah dengan pekali-pekali dalam Z_p.

2.0 PERINGKAT *P*-ADIC PENSIFAR DUA POLIONOMIAL

Teorem 2.1 di bawah ini memberikan saiz p-adic pensifar sepunya dua polinomial linear berpekali integer p-adic. Pembuktiannya mengilustrasikan kaedah Polihedron

Newton dengan mempertimbangkan kes-kes persilangan di bucu dan sisi-sisi bertindih gambar rajah-gambar rajah berkenaan.

Untuk pembuktian Teorem 2.1 kita perlukan hasil dari lema berikut. Pembuktian lema ini merujuk kepada Rajah 3(*a*) hingga 3(*f*) yang memberikan gabungan gambar rajah penunjuk polinomial berkenaan:

Lema 2.1

Katakan p perdana ganjil dan $f(x, y) = ax + by + c$, $g(x, y) = rx + sy + t$ dua polinomial berpekali integer dan berperingkat p-adic positif. Jika (μ, λ) titik di bucu gambar rajah penunjuk f dan g, maka wujud (ξ, η) sedemikian hingga $f(\xi, \eta) = 0$, $g(\xi, \eta) = 0$ dan $ord_p\, \xi = \mu$, $ord_p\, \eta = \lambda$.

Bukti

Pertimbangkan Rajah 3(*a*)
Dalam rajah ini didapati

$$ord_p \frac{c}{b} = ord_p \frac{t}{s} \tag{1}$$

$$ord_p \frac{c}{a} \geq ord_p \frac{t}{r} \tag{2}$$

$$ord_p \frac{b}{a} \geq ord_p \frac{r}{s} \tag{3}$$

Pertimbangkan bucu $\mathrm{A}(\mu, \lambda) = A\left(ord_p \frac{c}{a}, ord_p \frac{t}{s}\right)$ dalam rajah tersebut.

Sekarang pensifar sepunya f dan g adalah

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{bt - sc}{sa - br}, \frac{cr - at}{sa - br}\right)$$

kita dapati,

$$ord_p\, \xi = ord_p\,(bt - sc) - ord_p\,(sa - br)$$

Daripada (1) dan (3),

$$ord_p \xi = ord_p \frac{c}{a}$$
$$ord_p \eta = ord_p(cr - at) - ord_p(sa - br)$$

Daripada (2) dan (3)

$$ord_p \eta = ord_p \frac{t}{s}$$

Dengan itu wujud (ξ, η) sedemikian hingga $f(\xi, \eta) = 0$ dan $g(\xi, \eta) = 0$ dengan

$$ord_p \xi = \mu = ord_p \frac{c}{a}$$

$$ord_p \eta = \lambda = ord_p \frac{t}{s}$$

seperti yang ditegaskan.

Hasil yang serupa diperolehi dengan menggunakan kaedah yang sama seperti di atas bagi kes-kes dalam Rajah 3(*b*), 3(*c*) dan 3(*d*).

Pertimbangkan pula Rajah 3(*e*)
Dalam rajah ini didapati

$$ord_p \frac{a}{b} = ord_p \frac{r}{s} \tag{1}$$

$$ord_p \frac{t}{s} \geq ord_p \frac{c}{b} \tag{2}$$

$$ord_p \frac{t}{r} \geq ord_p \frac{c}{a} \tag{3}$$

Pertimbangkan bucu $A(\mu, \lambda) = A\left(ord_p \frac{c}{a}, ord_p \frac{c}{b}\right)$

Pensifar sepunya bagi f dan g adalah

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{bt - sc}{as - br}, \frac{cr - at}{as - br}\right)$$

Sekarang

$$ord_p\, \xi = ord_p\,(bt - sc) - ord_p\,(as - br)$$

Daripada (1) dan (2)

$$ord_p \xi = ord_p \frac{c}{a}$$

Juga

$$ord_p\, \eta = ord_p\,(cr - at) - ord_p\,(as - br)$$

Daripada (1) dan (3)

$$ord_p \eta = ord_p \frac{c}{b}$$

Dengan itu wujud (ξ, η) sedemikian hingga $f(\xi, \eta) = 0$, $g(\xi, \eta) = 0$ dengan

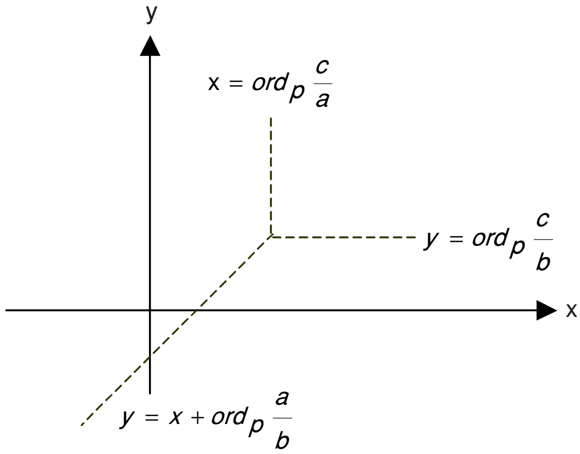
$$ord_p \xi = \mu = ord_p \frac{c}{a}$$

$$ord_p \eta = \lambda = ord_p \frac{c}{b}$$

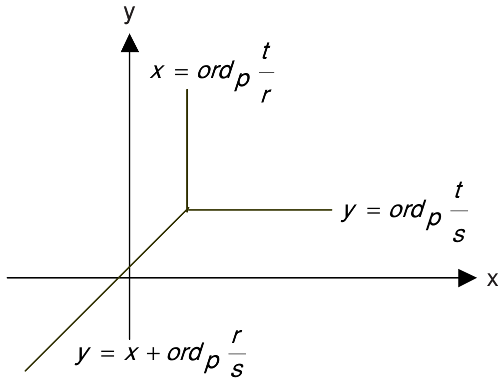
seperti yang dikehendaki.

Hasil yang serupa diperolehi daripada hujah yang sama bagi kes gabungan gambar rajah seperti dalam Rajah 3(f) dengan titik di bucu

$$(\mu, \lambda) = \left(ord_p \frac{t}{r}, ord_p \frac{t}{s} \right)$$

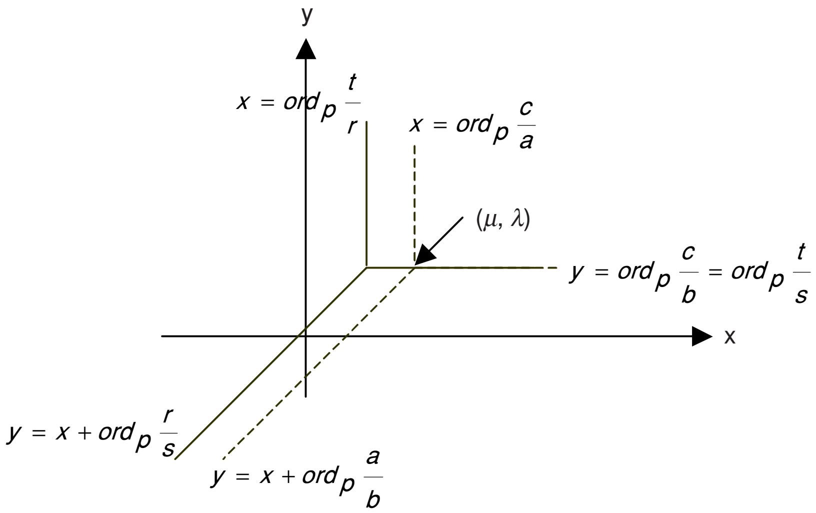


Rajah 3(i) Gambar rajah penunjuk bagi $f(x, y) = ax + by + c$

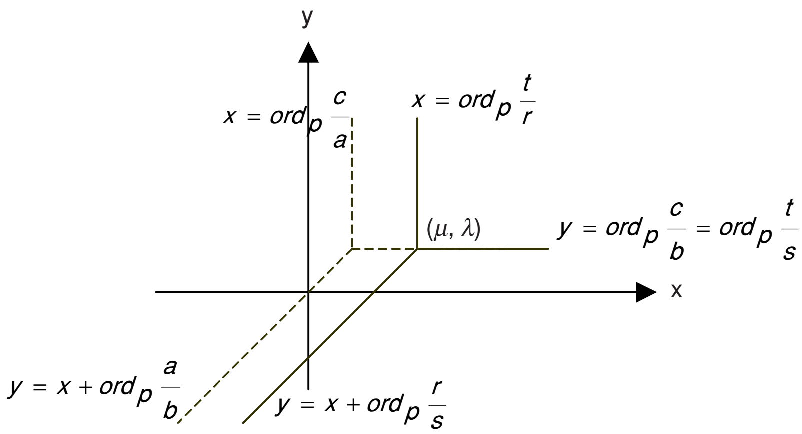


Rajah 3(ii) Gambar rajah penunjuk bagi $g(x, y) = rx + sy + t$

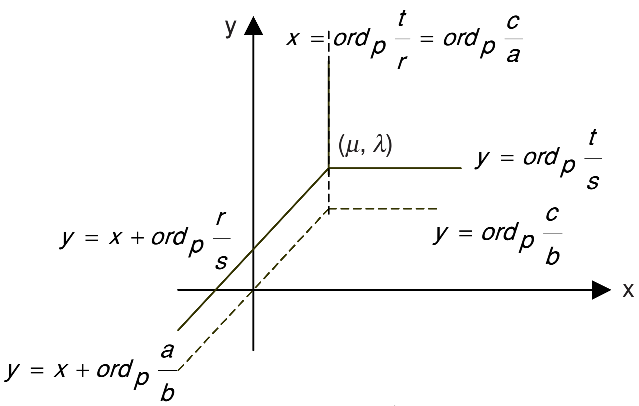
Gabungan gambar rajah penunjuk yang mungkin bagi Rajah 3(*i*) dan Rajah 3(*ii*)



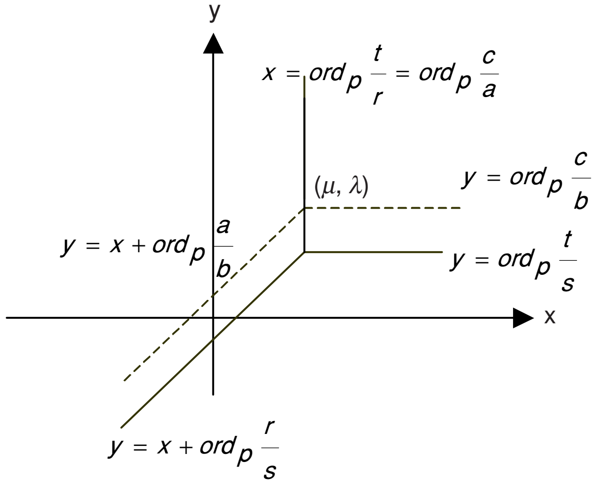
Rajah 3(*a*)



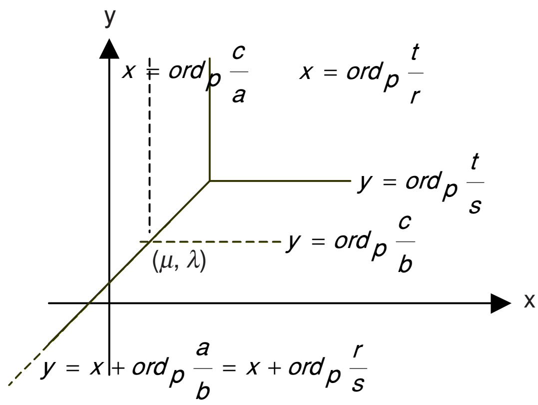
Rajah 3(*b*)



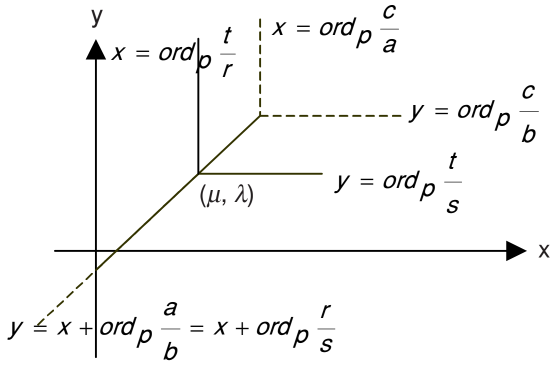
Rajah 3(*c*)



Rajah 3(*d*)



Rajah 3(*e*)



Rajah 3(*f*)

Teorem 2.1

Katakan $f(x, y) = ax + by + c$ dan $g(x, y) = rx + sy + t$ dua polinomial berpekali integer dan p perdana ganjil sedemikian hingga semua pekali f dan g berperingkat ord_p positif. Jika (μ, λ) sebarang titik persilangan mudah atau di bucu gambar rajah penunjuk bagi f dan g maka wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga $f(\xi, \eta) = 0$, $g(\xi, \eta) = 0$ dengan $ord_p\ \xi = \mu$, $ord_p\ \eta = \lambda$.

Bukti

Katakan persilangan yang berlaku dalam gabungan gambar rajah f dan g persilangan mudah. Dari pembuktian K.A. Atan [4] kita dapati wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ dengan ciri yang dikehendaki.

Katakan persilangan berlaku di sebarang bucu. Daripada Lema 2.1, wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga (ξ, η) adalah pensifar sepunya bagi f dan g dan $ord_p\ \xi = \mu$ dan $ord_p\ \eta = \lambda$.

Teorem di atas memperbaiki hasil yang diperolehi oleh K.A. Atan [3] bagi dua polinomial linear. Pembuktian oleh beliau menghadkan kajian kepada kes persilangan mudah sahaja.

Teorem berikut ini pula memberikan saiz p-adic pensifar sepunya bagi polinomial terbitan separa f_x, f_y terhadap x dan y bagi suatu polinomial kuadratik.

Teorem 2.2

Katakan $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$ suatu polinomial dalam $Z_p[x, y]$ dengan $p > 3$, p perdana. Katakan $\alpha > 0$ dan

$$\delta = \text{maks}\{ord_p\ a,\ ord_p\ b,\ ord_p\ c\}$$

Jika

$$ord_p\, f_x(0,0),\ ord_p\, f_y(0,0) \geq \alpha > \delta$$

maka wujud (ξ, η) di dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga $f_x(\xi, \eta) = 0$, $f_y(\xi, \eta) = 0$ dan $ord_p\ \xi$, $ord_p\ \eta \geq \alpha - \delta$.

Bukti

Terbitan separa bagi $f(x, y)$ terhadap x dan y masing-masing adalah

$$f_x(x, y) = 2ax + by + d$$

$$f_y(x, y) = bx + 2cy + e$$

Daripada Teorem 2.1 wujud (ξ, η) di dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga

$$f_x(\xi, \eta) = 0, f_y(\xi, \eta) = 0$$

$$\text{dan } ord_p\, \xi = \mu,\ ord_p\, \eta = \lambda$$

dengan (μ, λ) titik persilangan dalam gabungan gambar rajah penunjuk f_x dan f_y sama ada persilangan mudah atau di bucu. Daripada Lema 2.1, dengan tanpa kehilangan itlaknya,

$$ord_p \xi = \mu = ord_p \frac{d}{2a} \quad , \quad ord_p \eta = \lambda = ord_p \frac{e}{2c} \tag{1}$$

atau

$$ord_p \xi = \mu = ord_p \frac{d}{2a} \quad , \quad ord_p \eta = \lambda = ord_p \frac{d}{b} \tag{2}$$

Sekarang, $ord_p f_x(0,0).\ ord_p f_y(0,0) \geq \alpha \geq \delta \Rightarrow ord_p\, d,\ ord_p\, e \geq \alpha \geq \delta$

Oleh itu daripada (1), (2) kita dapati

$$ord_p\, \xi \geq (\alpha - \delta)$$

$$ord_p\, \eta \geq (\alpha - \delta)$$

seperti yang dikehendaki.

Dalam penulisan K.A. Atan [3], beliau ada mengkaji polinomial berbentuk

$$f(x, y) = ax^3 + bxy + cx + dy + e$$

yang melibatkan persilangan mudah sahaja.

Teorem 2.3 berikut ini membincangkan polinomial tersebut tetapi bagi semua kes.

Teorem 2.3

Katakan $f(x, y) = ax^3 + bxy + cx + dy + e$ suatu polinomial berpekali integer dan p perdana sedemikian hingga semua pekali berperingkat ord_p positif. Jika (μ, λ) titik persilangan mudah atau dibucu dalam gambar rajah penunjuk bagi f_x dan f_y maka wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga $f_x(\xi, \eta) = 0, f_y(\xi, \eta) = 0$ dengan ord_p $\xi = \mu$, $ord_p\ \eta = \lambda$.

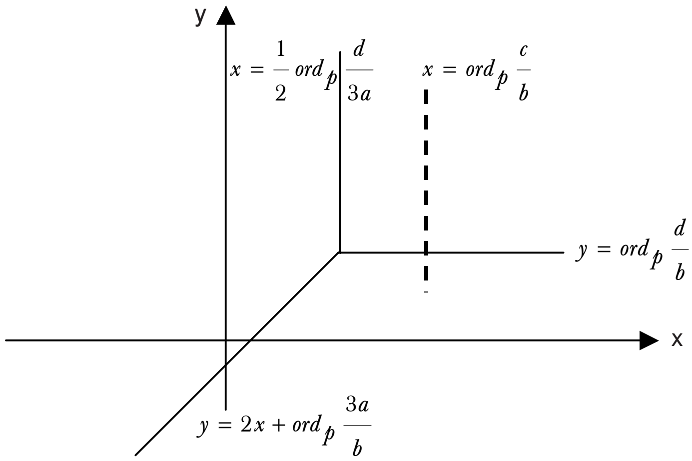
Bukti

Terbitan separa $f(x, y) = ax^3 + bxy + cy + dx + e$ terhadap x dan y masing-masing ialah:

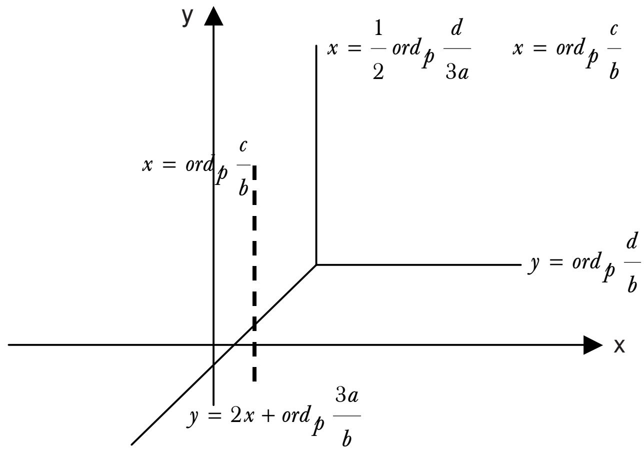
$$f_x = h(x, y) = 3ax^2 + by + d \tag{1}$$

$$f_y = g(x, y) = bx + c \tag{2}$$

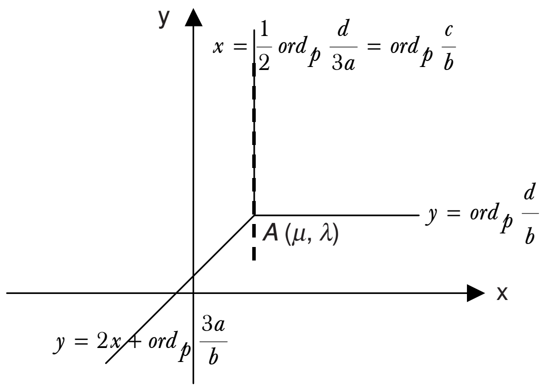
Gabungan gambar rajah penunjuk yang mungkin bagi f_x dan f_y ialah seperti dalam Rajah 4(a), Rajah 4(b) dan Rajah 4(c)



Rajah 4(*a*) Gabungan gambar rajah penunjuk bagi $f_x\,(x, y) = 3ax^2 + by + d$ (garis lurus) dan $f_y\,(x, y) = bx + c$ (garis putus-putus)



Rajah 4(*b*) Gabungan gambar rajah penunjuk bagi $f_x\,(x, y) = 3ax^2 + by + d$ (garis lurus) dan $f_y\,(x, y) = bx + c$ dan (garis putus-putus)



Rajah 4(*c*) Gabungan gambar rajah penunjuk bagi $f_x\,(x, y) = 3ax^2 + by + d$ (garis lurus) dan $f_y\,(x, y) = bx + c$ (garis putus-putus)

Rajah 4(a) dan Rajah 4(b) memberikan gabungan gambar rajah penunjuk bagi kes persilangan mudah f_x dan f_y. K.A. Atan [3] telah mendapatkan keputusan bagi kes ini.

Sekarang kita pertimbangkan Rajah 4(c) iaitu

Dalam kes ini, $ord_p \frac{c}{b} = \frac{1}{2} ord_p \frac{d}{3a}$

iaitu $ord_p\, 3c^2\, a = ord_p\, b^2\, d$ (3)

Pada titik A

$$A(\mu,\lambda) = \left(\frac{1}{2} ord_p \frac{d}{3a}, ord_p \frac{d}{b}\right)$$

atau

$$A(\mu,\lambda) = \left(ord_p \frac{c}{b}, ord_p \frac{d}{b}\right)$$

Daripada (1) dan (2) wujud $(\hat{x},\hat{y})$ pensifar sepunya f_x dan f_y sedemikian hingga

$$\hat{x} = \frac{-c}{b} \qquad \text{dan} \qquad \hat{y} = \frac{1}{b^3}\left(b^2 d + 3ac^2\right)$$

Oleh itu,

$$ord_p \hat{x} = ord_p \frac{c}{b} = \frac{1}{2} ord_p \frac{d}{3a}$$
$$ord_p \hat{y} = ord_p(b^2 d + 3ac^2) - ord_p b^3$$

Sekarang

Daripada (3) $ord_p\,(b^2\, d + 3ac^2) = \min\,\{ord_p\, b^2\, d, ord_p\, 3ac^2\} = ord_p\, b^2\, d = ord_p\, 3c^2\, a$.

Maka

$$ord_p \hat{y} = ord_p(b^2 d + 3ac^2) - ord_p b^3 \Rightarrow ord_p \hat{y} = ord_p \frac{b^2 d}{b^3} = ord_p \frac{d}{b}$$

Biarkan $\xi = \hat{x}$ dan $\eta = \hat{y}$

$\therefore$ wujud (ξ, η) sedemikian hingga $h(\xi, \eta) = 0$, $g(\xi, \eta) = 0$.

dan,

$$ord_p \xi = \mu = \frac{1}{2} ord_p \frac{d}{3a}$$
$$ord_p \eta = \lambda = ord_p \frac{d}{b}$$

Teorem 2.3 ini dapat memperbaiki dan menguatkan lagi hujah bagi keputusan yang dikemukakan oleh K.A. Atan [3] dan K.A. Atan dan Abdullah [7].

Dalam penulisan beliau K.A. Atan [4] mengkaji polinomial berbentuk

$$f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cx + dy + e$$

yang terbitan separanya terhadap x dan y masing-masing adalah

$$g(x, y) = 3ax^2 + by^2 + c$$

$$h(x, y) = 2bxy + d$$

dengan pekali dalam set Z_p. Beliau mendapati bahawa jika

$$ord_p\, g(x_0, y_0),\ ord_p\, h(x_0, y_0) \geq \alpha > \delta$$

dengan $\alpha > 0, \delta = \text{maks}\left\{ord_p\, 3a, \frac{3}{2} ord_p\, b\right\}$ dan (x_0, y_0) di dalam set $\Omega_p \times \Omega_p$, maka wujud pensifar (ξ, η) bagi g dan h sedemikian hingga

$$ord_p\,(\xi - x_0), ord_p\,(\eta - y_0) \geq \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

Pembuktian bagi penegasan ini menggunakan kaedah jelmaan dan meneliti ciri persilangan mudah dua gambar rajah penunjuk yang diperolehi daripada Polihedron Newton g dan h.

Dalam teorem di bawah ini kita berikan pula keputusan bagi polinomial $f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cx + dy + e$ dalam $Z_p\,[x, y]$ dengan $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Teorem 2.4

Katakan $f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cx + dy + e$ suatu polinomial dalam $Z_p\,[x, y]$ dengan $p > 3$ perdana. Katakan $\alpha > 0$ dan $\delta = \text{maks}\{ord_p\, a, ord_p\, b\}$.

Jika

$$ord_p\, f_x(0,0),\ ord_p\, f_y(0,0) \geq \alpha > \delta$$

maka wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ dengan $f_x(\xi, \eta) = 0, f_y(\xi, \eta) = 0$.

dan
$$ord_p \xi, ord_p \eta \geq \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

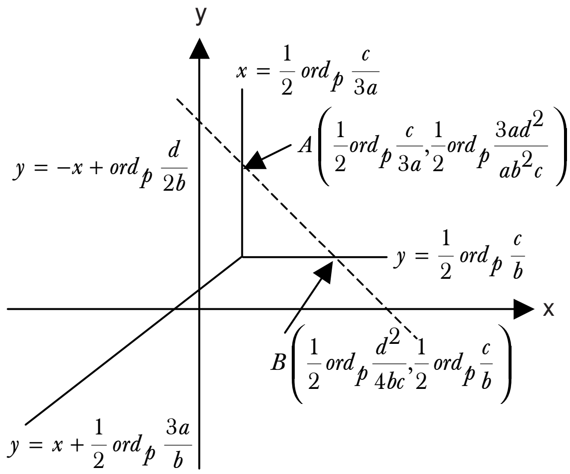
Bukti

Terbitan separa bagi polinomial di atas terhadap x dan y masing-masing ialah:

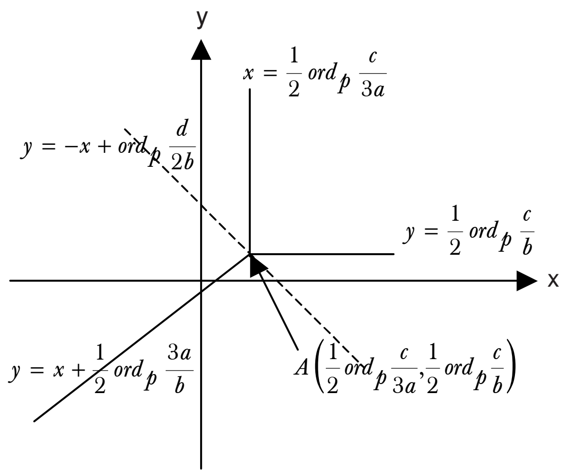
$$f_x(x, y) = 3ax^2 + by^2 + c$$

$$f_y(x, y) = 2bxy + d$$

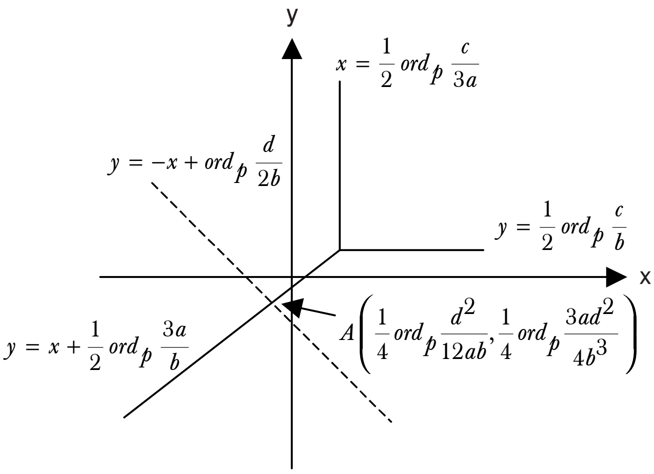
Pertimbangkan gabungan-gabungan yang mungkin bagi gambar rajah Polihedron Newton f_x dan f_y seperti berikut



Rajah 5(*a*)



Rajah 5(*b*)



Rajah 5(*c*)

Dalam Rajah 5(a) pertimbangkan titik

$$A\left(\frac{1}{2}\, ord_p \frac{c}{3a}, \frac{1}{2}\, ord_p \frac{3ad^2}{4b^2c}\right)$$

dan

$$B\left(\frac{1}{2}\, ord_p \frac{d^2}{4bc}, \frac{1}{2}\, ord_p \frac{c}{b}\right)$$

Daripada rajah didapati,

$$\frac{1}{2}\, ord_p \frac{c}{3a} \leq \frac{1}{2}\, ord_p \frac{d^2}{4bc} \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\, ord_p \frac{3ad^2}{4b^2c} \geq \frac{1}{2}\, ord_p \frac{c}{b} \tag{2}$$

Daripada (1), $ord_p\, 4b^2 c \leq ord_p\, 3ad^2$

Daripada (2), $ord_p\, 3abd^2 \geq ord_p\, 4b^2 c^2$

Iaitu $ord_p\, 3ad^2 \geq ord_p\, 4bc^2$

Bagi kedua-dua titik A, B

$$ord_p\, b^2 c^2 \leq ord_p\, 3abd^2 \tag{3}$$

Pensifar bagi f_x dan f_y adalah

$$\xi = \frac{d}{2b\eta}$$

dengan $$\eta = \left[\frac{-bc \pm \left(b^2c^2 - 3abd^2\right)^{1/2}}{2b^2}\right]^{1/2}$$

Sekarang

$$ord_p \eta = \frac{1}{2} ord_p \left[\frac{-bc \pm \left(b^2c^2 - 3abd^2\right)^{1/2}}{2b^2}\right]$$

Daripada (3)

$$ord_p \eta = \frac{1}{2} ord_p \frac{bc}{2b^2} = \frac{1}{2} ord_p \frac{c}{b} \text{ sebab } p > 3$$

Juga
$$\begin{aligned} ord_p \xi &= ord_p \frac{d}{2b} - ord_p \eta \\ &= ord_p \frac{d}{2b} - \frac{1}{2} ord_p \frac{c}{b} \\ &= \frac{1}{2} ord_p \frac{d^2 b}{4b^2 c} = \frac{1}{2} ord_p \frac{d^2}{4bc} \end{aligned}$$

Oleh itu wujud (ξ, η) di dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga $f_x(\xi, \eta) = 0$, $f_y(\xi, \eta) = 0$

dan $ord_p \xi = \frac{1}{2} ord_p \frac{d^2}{4bc}$, $ord_p \eta = \frac{1}{2} ord_p \frac{c}{b}$

Sekarang
$$ord_p \xi = \frac{1}{2} ord_p \frac{d^2}{4bc} \geq \frac{1}{2} ord_p \frac{c}{3a} \tag{4}$$

$$ord_p \eta = \frac{1}{2} ord_p \frac{c}{b} \tag{5}$$

Juga, $ord_p f_x(0,0).\ ord_p f_y(0,0) \geq \alpha > \delta \Rightarrow ord_p c,\ ord_p d \geq \alpha > \delta$

Maka daripada (4), (5) kita dapati

$$ord_p \xi \geq \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

$$ord_p \eta \geq \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

Dalam kes Rajah 5(b) gabungan rajah penunjuk adalah seperti dalam Rajah 5(a) dengan titik A dan B bertindih. Dalam kes ini hujah yang sama digunakan dengan

$$ord_p\,\xi = \frac{1}{2}\,ord_p\,\frac{c}{3a}$$
$$ord_p\,\eta = \frac{1}{2}\,ord_p\,\frac{c}{b}$$

untuk mendapatkan keputusan teorem.

Rajah 5(c) memberikan gabungan gambar rajah penunjuk bagi f_x dan f_y yang mempunyai persilangan mudah. Dari K.A. Atan [4] wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga $f_x(\xi, \eta) = 0$, $f_y(\xi, \eta) = 0$ dan

$$ord_p\,\xi = \frac{1}{4}\,ord_p\,\frac{d^2}{12ab} = \frac{1}{2}\,ord_p\left(\frac{d^2}{12ab}\right)^{1/2}$$
$$ord_p\,\eta = \frac{1}{4}\,ord_p\,\frac{3ad^2}{4b^3} = \frac{1}{2}\,ord_p\left(\frac{3ad^2}{4b^3}\right)^{1/2}$$

iaitu

$$ord_p\,\xi = \frac{1}{2}\,ord_p\,\frac{d}{a^{1/2}b^{1/2}} \tag{6}$$

$$ord_p\,\xi = \frac{1}{2}\,ord_p\,\frac{a^{1/2}d}{b^{3/2}} \tag{7}$$

Sekarang, $ord_p\,f_x(0,0).\ ord_p\,f_y(0,0) \geq \alpha > \delta \Rightarrow ord_p\,d \geq \alpha > \delta$

Maka daripada (6) dan (7)

$$ord_p\,\xi \geq \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$
$$ord_p\,\eta \geq \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

Dalam teorem berikut kita mengitlakkan beberapa keputusan di atas dengan mengambil sebarang titik (x_0, y_0) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga $f_x\,(0,0)$, $f_y\,(0,0) \geq \alpha$ bagi polinomial $f(x, y)$ tertentu.

Teorem 2.5

Katakan $p > 3$ perdana dan $f(x, y) = ax + by + c$, $g(x, y) = rx + sy + t$ polinomial linear dalam $Z_p [x, y]$, $\alpha > 0$ dan

$$\delta = \text{maks}\{ord_p\, a, ord_p\, b, ord_p\, r, ord_p\, s\}$$

Jika (x_0, y_0) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga

$$ord_p\, f(x_0, y_0), ord_p\, g(x_0, y_0) \geq \alpha > \delta$$

maka wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga

$$f(\xi, \eta) = 0, g(\xi, \eta) = 0$$

dan

$$ord_p(\xi - x_0), ord_p(\eta - y_0) \geq (\alpha - \delta)$$

Bukti

$$f(x, y) = ax + by + c$$

$$g(x, y) = rx + sy + t$$

Biarkan

$$X = x - x_0 \quad , \quad Y = y - y_0$$

dan

$$G(X,Y) = a(X + x_0) + b(Y + y_0) + c$$

$$H(X,Y) = r(X + x_0) + s(Y + y_0) + t$$

$$G(X,Y) = aX + bY + f_0(x_0, y_0)$$

$$H(X,Y) = rX + sY + g_0(x_0, y_0)$$

dengan $f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c$ dan $g(x_0, y_0) = rx_0 + sy_0 + t$. Daripada gabungan gambar rajah penunjuk bagi Polihedron Newton G dan H dan Teorem 2.1 wujud $\left(\hat{\xi}, \hat{\eta}\right)$ pensifar sepunya bagi G dan H sedemikian hingga

$$ord_p\, \hat{\xi} \geq (\alpha - \delta) \text{ dan } ord_p\, \hat{\eta} \geq (\alpha - \delta)$$

Biarkan
$$\xi = \hat{\xi} + x_0$$
$$\eta = \hat{\eta} + y_0$$

$\therefore$ wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga $f(\xi, \eta) = 0$, $g(\xi, \eta) = 0$ dengan

$$ord_p(\xi - x_0) = ord_p \hat{\xi} \geq (\alpha - \delta)$$

$$ord_p(\eta - x_0) = ord_p \hat{\eta} \geq (\alpha - \delta)$$

Teorem 2.6

Katakan $p > 3$ perdana dan $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$ polinomial dalam $Z_p[x, y]$, $\alpha > 0$ dan

$$\delta = \text{maks}\{ord_p\, a,\, ord_p\, b,\, ord_p\, c\}$$

Jika (x_0, y_0) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga

$$ord_p\, f_x(x_0, y_0).\ ord_p\, f_y(x_0, y_0) \geq \alpha > \delta$$

maka wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga

$$f_x(\xi, \eta) = 0, f_y(\xi, \eta) = 0$$

dan

$$ord_p(\xi - x_0),\ ord_p(\eta - y_0) \geq (\alpha - \delta)$$

Bukti

Terbitan separa bagi polinomial di atas ialah

$$f_x(x, y) = 2ax + by + d$$

$$f_y(x, y) = bx + 2cy + e$$

Biarkan

$$X = x - x_0 \quad , \quad Y = y - y_0$$

dan

$$G(X,Y) = 2a(X + x_0) + b(Y + y_0) + d$$

$$H(X,Y) = b(X + x_0) + 2c(Y + y_0) + e$$

$$G(X,Y) = 2aX + bY + f_x(x_0, y_0)$$

$$H(X,Y) = bX + 2cY + f_y(x_0, y_0)$$

dengan $f_x(x_0, y_0) = 2ax_0 + by_0 + d$, $f_y(x_0, y_0) = bx_0 + 2cy_0 + e$. Daripada gabungan gambar rajah penunjuk bagi Polihedron Newton G dan H dan Teorem 2.1 wujud $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ pensifar sepunya bagi G dan H sedemikian hingga

$$ord_p\,\hat{\xi} \geq (\alpha - \delta) \text{ dan } ord_p\,\hat{\eta} \geq (\alpha - \delta)$$

Biarkan
$$\xi = \hat{\xi} + x_0$$
$$\eta = \hat{\eta} + y_0$$

$\therefore$ wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga $f_x(\xi, \eta) = 0$, $f_y(\xi, \eta) = 0$ dengan

$$ord_p\,(\xi - x_0) = ord_p\,\hat{\xi} \geq (\alpha - \delta)$$
$$ord_p\,(\eta - x_0) = ord_p\,\hat{\eta} \geq (\alpha - \delta)$$

Teorem 2.7

Katakan $p > 3$ perdana dan $f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cx + dy + e$ polinomial dalam $Z_p\,[x, y]$, $\alpha > 0$, dan

$$\delta = \text{maks}\{ord_p\,a,\, ord_p\,b\}$$

Jika (x_0, y_0) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga

$$ord_p\,f_x(x_0, y_0),\, ord_p\,f_y(x_0, y_0) \geq \alpha > \delta$$

maka wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga

$$f_x(\xi, \eta) = 0,\, f_y(\xi, \eta) = 0$$

dan

$$ord_p\,(\xi - x_0),\, ord_p\,(\eta - y_0) \geq \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

Bukti

Terbitan separa bagi $f(x, y)$ terhadap x dan y ialah

$$f_x(x, y) = 3ax^2 + by^2 + c$$

$$f_y(x, y) = 2bxy + d$$

Biarkan

$$X = x - x_0 \quad , \quad Y = y - y_0$$

dan

$$G(X,Y) = f_x(X + x_0,\, Y + y_0)$$

$$H(X,Y) = f_y(X + x_0,\, Y + y_0)$$

Maka

$$G(X,Y) = 3aX^2 + bY^2 + 6ax_0X + 2by_0Y + f_x(x_0, y_0)$$

$$H(X,Y) = 2bXY + 2by_0X + 2bx_0Y + f_y(x_0, y_0)$$

dengan $f_x(x_0, y_0) = 3ax^2{}_0 + by^2{}_0 + c$ dan $f_y(x_0, y_0) = 2bx_0y_0 + d$. Daripada gabungan gambar rajah penunjuk bagi Polihedron Newton G dan H dan Teorem 2.3 wujud $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ pensifar sepunya bagi G dan H sedemikian hingga

$$ord_p\, \hat{\xi} \geq \frac{1}{2}(\alpha - \delta) \text{ dan } ord_p\, \hat{\eta} \geq \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

Biarkan
$$\xi = \hat{\xi} + x_0$$
$$\eta = \hat{\eta} + y_0$$

$\therefore$ wujud (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga $f_x(\xi, \eta) = 0$, $f_y(\xi, \eta) = 0$ dengan

$$ord_p\,(\xi - x_0) = ord_p\, \hat{\xi} \geq \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

$$ord_p\,(\eta - x_0) = ord_p\, \hat{\eta} \geq \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

3.0 KEKARDINALAN $V(g, h; p^\alpha)$

Katakan p perdana dan $g(x,y)$, $h(x,y)$ polinomial dua pemboleh ubah berpekali Z_p dan (ξ_i, η_i) pensifar sepunya g dan h dengan i subskrip menandakan bilangannya. Katakan juga bagi $\alpha > 0$,

$$H_i = \{(x, y) \in \Omega_p \times \Omega_p : ord_p(x - \xi_i), ord_p(y - \eta_i) = \max_j \{ord_p(x - \xi_i), ord_p(y - \eta_i)\}$$
$$\text{dan } ord_p\, g(x, y), ord_p\, H(x, y) \geq \alpha\}$$

Di sini Ω_p adalah medan p-adic tertutup dan lengkap secara aljabar.

Dengan kaedah Loxton dan Smith [2], boleh ditunjukkan bahawa kekardinalan bagi $V(g, h; p^\alpha)$ adalah bersandar kepada $ord_p(x - \xi_i)$, $ord_p(y - \eta_i)$ dengan $(x,y) \in H_i(\alpha)$ seperti yang dibuktikan oleh K.A. Atan [3] bagi polinomial dengan $n \geq 2$ pemboleh ubah. Kita turunkan pernyataan teorem yang sama bagi polinomial $g(x,y)$ dan $h(x,y)$.

Teorem 3.1

Katakan p perdana dan $g(x,y)$, $h(x,y)$ dua polinomial di dalam $Z_p[x, y]$. Katakan (ξ_i, η_i), $i \geq 1$ pensifar sepunya bagi g dan h, dan

$$\gamma_i(\alpha) = \inf_{x \in H_i(\alpha)} \{ord_p(x - \xi_i), ord_p(y - \eta_i)\}$$

Jika $\alpha > \gamma_i(\alpha)$, maka

$$|V(g, h; p^\alpha)| \leq \sum_i p^{2(\alpha - \gamma_i(\alpha))}$$

Dengan menggunakan pernyataan teorem ini kita berikan anggaran kepada kekardinalan $V(g, h; p^\alpha)$ bagi $g = f_x$, $h = f_y$ dengan $f(x,y)$ suatu polinomial dalam $Z_p[x, y]$ seperti dalam teorem berikut.

Teorem 3.2

Katakan $p > 3$ dan $f(x, y) = ax + by + c$ dan $g(x, y) = rx + sy + t$ polinomial dalam $Z_p[x, y]$, $\alpha > 0$ dan $\delta = \text{maks}\{ord_p\, a, ord_p\, b, ord_p\, r, ord_p\, s\}$.

Maka

$$|V(f_x, f_y; p^\alpha)| \leq \begin{cases} p^{2\alpha} & \text{jika} \quad \alpha \leq \delta \\ p^{2\delta} & \text{jika} \quad \alpha > \delta \end{cases}$$

Bukti

Daripada Teorem 3.1

$$|V(f_x, f_y; p^\alpha)| \leq \sum_i p^{2(\alpha - \gamma_i(\alpha))}$$

dengan

$$\gamma_i(\alpha) = \inf_{x \in H_i(\alpha)} \{ord_p(x - \xi_i), ord_p(y - \eta_i)\}$$

Daripada Teorem 2.5

$$\gamma_i(\alpha) \geq (\alpha - \delta)$$

Oleh kerana bilangan pensifar sepunya f dan g tidak akan melebihi hasil darab darjah kedua-dua polinomial (Teorem Bezout) kita dapati,

$$|V(f_x, f_y; p^\alpha)| \leq p^{2(\alpha - (\alpha - \delta))} \text{ jika } \alpha > \delta$$

Adalah jelas

$$|V(f_x, f_y; p^\alpha)| \leq p^{2\alpha} \text{ jika } \alpha \leq \delta$$

Maka kita perolehi

$$\left|V(f_x, f_y; p^\alpha)\right| \le \begin{cases} p^{2\alpha} & \text{jika} \quad \alpha \le \delta \\ p^{2\delta} & \text{jika} \quad \alpha > \delta \end{cases}$$

Teorem 3.3

Katakan $p > 3$ dan $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$ polinomial dalam $Z_p[x, y]$, $\alpha > 0$ dan $\delta = \text{maks}\{ord_p\ a, ord_p\ b, ord_p\ c\}$.

Maka

$$\left|V(f_x, f_y; p^\alpha)\right| \le \begin{cases} p^{2\alpha} & \text{jika} \quad \alpha \le \delta \\ p^{2\delta} & \text{jika} \quad \alpha > \delta \end{cases}$$

Bukti

Daripada Teorem 3.1

$$\left|V(f_x, f_y; p^\alpha)\right| \le \sum_i p^{2(\alpha - \gamma_i(\alpha))}$$

dengan

$$\gamma_i(\alpha) = \inf_{x \in H_i(\alpha)} \{ord_p(x - \xi_i), ord_p(y - \eta_i)\}$$

Daripada Teorem 2.6

$$\gamma_i(\alpha) \ge (\alpha - \delta)$$

Oleh kerana bilangan pensifar sepunya f_x dan f_y tidak akan melebihi hasil darab darjah kedua-dua polinomial (Teorem Bezout) kita dapati,

$$\left|V(f_x, f_y; p^\alpha)\right| \le p^{2(\alpha - (\alpha - \delta))} \text{ jika } \alpha > \delta$$

Adalah jelas

$$\left|V(f_x, f_y; p^\alpha)\right| \le p^{2\alpha} \text{ jika } \alpha \le \delta$$

Maka kita perolehi

$$\left|V(f_x, f_y; p^\alpha)\right| \le \begin{cases} p^{2\alpha} & \text{jika} \quad \alpha \le \delta \\ p^{2\delta} & \text{jika} \quad \alpha > \delta \end{cases}$$

Teorem 3.4

Katakan $p > 3$ perdana dan

$$f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cx + dy + e$$

polinomial di dalam $Z_p[x, y]$, $\alpha > 0$ dan $\delta = \text{maks}\{ord_p\, a, ord_p\, b\}$.

Maka

$$\left|V(f_x, f_y; p^\alpha)\right| \le \begin{cases} p^{2\alpha} & \text{jika} \quad \alpha \le \delta \\ 4p^{\alpha+\delta} & \text{jika} \quad \alpha > \delta \end{cases}$$

Bukti

Daripada Teorem 3.1

$$\left|V(f_x, f_y; p^\alpha)\right| \le \sum_i p^{2(\alpha - \gamma_i(\alpha))}$$

dengan

$$\gamma_i(\alpha) = \inf_{x \in H_i(\alpha)} \{ord_p(x - \xi_i), ord_p(y - \eta_i)\}$$

Daripada Teorem 2.7

$$\gamma_i(\alpha) \ge \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

Oleh kerana bilangan pensifar sepunya f_x dan f_y tidak akan melebihi hasil darab darjah kedua-dua polinomial (Teorem Bezout) kita dapati,

$$\left|V(f_x, f_y; p^\alpha)\right| \le 4p^{2(\alpha - \frac{1}{2}(\alpha - \delta))} \text{ jika } \alpha > \delta$$

Adalah jelas

$$\left|V(f_x, f_y; p^\alpha)\right| \le p^{2\alpha} \text{ jika } \alpha \le \delta$$

Maka kita perolehi

$$\left|V(f_x, f_y; p^\alpha)\right| \le \begin{cases} p^{2\alpha} & \text{jika} \quad \alpha \le \delta \\ 4p^{\alpha+\delta} & \text{jika} \quad \alpha > \delta \end{cases}$$

4.0 KESIMPULAN

Hasil daripada kajian kami didapati bahawa jika f dan g dua polinomial berpekali integer dan p perdana ganjil sedemikian hingga semua pekali f dan g berperingkat ord_p positif dan jika (μ, λ) titik persilangan gambar rajah penunjuk f dan g sama ada persilangan mudah atau di bucu maka wujud punca sepunya (ξ, η) dalam $\Omega_p \times \Omega_p$ sedemikian hingga $ord_p\, \xi = \mu$, $ord_p\, \eta = \lambda$. Nilai kekardinalan $V(f, g; p^\alpha)$ pula bersandar kepada $ord_p\,(x - \xi_i)$, $ord_p\,(y - \eta_i)$ dengan $(x,y) \in H_i(\alpha)$ seperti yang telah dibuktikan oleh K.A. Atan [8] bagi polinomial dengan n ≥ 2 pemboleh ubah dan $\xi_i = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$, $\eta_i = \{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n\}$.

RUJUKAN

[1] Chalk J. H. H. dan R. A. Smith. 1982. Sandor's Theorem on Polynomial Congruences and Hensel's Lemma. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci.* Canada 4(1).

[2] Loxton J. H dan R. A. Smith. 1982. Estimate for Multiple Exponential Sums. *J. Aust. Math. Soc.*, 33: 125 – 134.

[3] Mohd. Atan K. A. 1986. Newton Polyhedral Method of Determining p-adic Orders of Zeros Common to Two Polynomials in $Q_p[x,y]$. *Pertanika* 9(3): 375 – 380. Universiti Pertanian Malaysia.

[4] Mohd. Atan K. A. 1988. A Method for Determining the Cardinality of the Set of Solutions to Congruence Equations. *Pertanika* 11(1): 125 – 131. Universiti Pertanian Malaysia.

[5] Mohd. Atan K. A. dan J. H. Loxton. 1986. Newton Polyhedra and Solutions of Congruences. In Loxton, J. H. and Van der Poorten, A.(ed). *Diophantine Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

[6] Mohd. Atan K. A. dan I. B. Abdullah. 1992. Set of Solution to Congruence Equationa Associated with a Cubic Form. *Journal of Physical Science* 3: 1 – 6.

[7] Mohd. Atan K. A. dan I. B. Abdullah. 1993. On the Estimate to Solutions of Congruence Equations Associated with a Cubic Form. *Pertanika J. Sci. and Technol.* 1(2): 249 – 260. Universiti Pertanian Malaysia.

[8] Mohd. Atan K. A. 1990. Satu Kaedah Menganggar Hasiltambah Eksponen Berganda. *Matematika* 6(1): 37 – 48. Universiti Teknologi Malaysia.

[9] Chan K. L. dan K. A. Mohd. Atan. 1997. On the Estimate to Solutions of Congruence Equations Associated with a Quartic Form. *Journal of Physical Science* 8: 21 – 34.

[10] Heng S. H. dan K. A. Mohd Atan. 1999. An Estimation of Exponential Sums Associated With A Cubic Form. *Journal of Physical Science* 10: 1 – 21.